# I-147　HERMITE 階差法による平板の解析（2）

岐阜大学工学部　正員　井上 肇

構造物（Shell，平板，アーチ，はり等）を解くとき，最も基本的には，それらの釣り合いの式（基礎微分方程式）を，境界条件の下に解いてゆくことになる。これは，境界条件，構造物の形状等から，その適用が難しいような場合には，古くから，その微分方程式の数学的近似である階差法が用いられてきたが，階差表示によって得られる式が，高次の連立方程式になるため，それに対して，有効な計算手段をもたなかった時代にはある程度の進展しか見られなかった。[1]

このことは，ことに最近のように，ときには数万元にもおよぶような連立方程式にも挑戦できるような，電子計算機を利用できるようになって，その考え方は変ってきた。これらの構造物の解は，その構造物の物理的な近似である有限要素法（FEM）によって遂行されることが多くなってきた。確かにFEMは，分割点は任意，境界条件の導入が容易，要素数の増加につれての正確解への接近の保障等の多くの利点がある。

旧来の微分方程式の近似解法である階差法（FDM）は，有限要素法に比べて，確かに分割点は任意でない，境界条件の導入は容易でない，また数値計算的には，行列の主対角線についての，係数バンドの巾が大きく，連立方程式解法上の不利等が考えられる。しかしFEMとFDMとを同一の分割数にとった場合には，表－1のように階差法の方がより小さい未知量を扱えばよいことになる。しかし，同一分割数での解に含まれる誤差は，言うまでもなく階差法の方が大きい（たとえば等分布荷重を満載した固定ばりでは表-2のようになる。ここで有限要素法としては，たわみ角法を用いれば解は正解になる）。

表－1　有限要素法と階差法の未知量の数の比較
（一点あたりの未知量の数）

| | はり | アーチ | 平板 | シェル |
|---|---|---|---|---|
| 有限要素法 | 2 | 3 | 3 | 5 |
| 階差法 | 1 | 2 | 1 | 3 |

表－2　階差法のもつ誤差率（%）
（固定ばり，等分布荷重満載，スパン中央のたわみ）

| 分割数 | Type A | Type B | Type C | Type D |
|---|---|---|---|---|
| 8 | +12.5 | +1.23 | +0.78 | 0. |
| 16 | +0.31 | +0.16 | +0.098 | 0. |

| | | 着目点の巾 $f$ | $f''$ |
|---|---|---|---|
| Type A | 普通階差法 | 1 | 0 |
| 〃 B | 高精度階差法 | 2 | 0 |
| 〃 C | Harmite 階差法－I | 1 | 1 |
| 〃 D | 〃　〃－II | 2 | 1 |

このように，同一の分割数でも，通常の階差法に比べて，Hermite 階差法 I，II は，きわめて高い精度をもっていることがわかる。Type C（Hermite－I）は8等分のものであろうし，実用的には十分の値を示している。

Hermite 階差法（Multilocal（英語），Mehrstellen（独語））は，微分方程式の導関数の近似度を，単に関数点の数を増すだけではなく，複数の点の導関数をも考えることにより，高めようとするものである。これは，つぎのように表現される。

$$\sum_{k=1}^{n}\left\{\sum_{i=S_{k1}}^{S_{k2}} A_{ki} f^{(k)}(x+i\lambda)\right\} + \sum_{i=S_{01}}^{S_{02}} a_i f(x+i\lambda) = 0 \qquad (1)$$

ここで $f^{(k)}$：$f$ の $k$ 階導関数，$S_{ki}$：$k$ 階導関数をとるべき巾である。

(1)は普通ならびに高精度階差法のときには，つぎのように書かれる。

$$f^{(n)}(x) = \sum_{i=S_{01}}^{S_{02}} a_i f(x+i\lambda) \qquad (2)$$

ここで $S_{01}$，$S_{02}$ は $n$ に応じた値をとる。

(1)においては，表現が必要な階数の微係数のみならず，境界条件に入ってくる他の微係数をもとりいれることができ，その分だけ微係数の近似度を上げることができる。

このHermite階差法によって、平板やシェルは多くの研究者によって解かれているが[5,6,7,8]、こゝでは、構造物を構成している材料は、必ずしも等方性と考えるのみでなく、直交異方性を考えることによって、より一般性をもたせようとしたものであり、その際の問題点を明らかにしようとするものである。たとえば 直交異方性板の基礎微分方程式は、周知のとおり

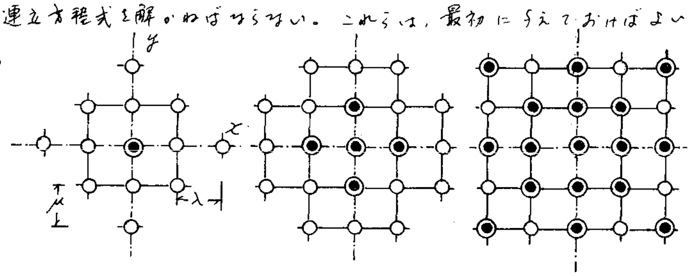
$$B_x \partial^4 w/\partial x^4 + 2H \partial^4 w/\partial x^2 \partial y^2 + B_y \partial^4 w/\partial y^4 = f(x,y) = F \qquad (3)$$

であって、境界条件は表-3のようである。( $2H = B_x\nu_y + B_y\nu_x + (1-\sqrt{\nu_x\nu_y})\sqrt{B_x B_y}$ , $2C = (1-\sqrt{\nu_x\nu_y})\sqrt{B_x B_y}$ )

表-3 境界条件

| | |
|---|---|
| 固定辺 | $w=0,\ \partial w/\partial n = 0$ |
| 単純支持辺 | $w=0,\ M_n=0\ (\partial^2 w/\partial n^2 = 0)$ |
| 自由辺 | $M_n=0,\ (\partial^2 w/\partial n^2 + \nu_s \partial^2 w/\partial s^2 = 0)$<br>$V_n=0,\ (\partial^3 w/\partial n^3 + \gamma_s \partial^3 w/\partial n \partial s^2 = 0)$<br>$\gamma_s = 4C/B_n + \nu_s$ |

Hermite階差法による微係数の階差表現における各関数値の係数は、各点での関数値の着目点のまわりにTaylor展開して(1)によって求めるわけであるが、その条件式の数は、求める微係数の所要精度に応じて定まってくるため、与点の数は表-4の条件式の数と同じにしなければならない。したがって与点のとり方、等関数、Fのとり方は、全く任意ではなく、対称性等を考慮した上でそのパターンを決定しなければならない。たとえば、普通階差法に用いられている誤差のorderが $O(\lambda^6)$ の場合は図-1a、Hermite法の $O(\lambda^8)$ は図-1b、Hermite法の $O(\lambda^{10})$ は図-1cのようにとらざるを得ない。(必ずしもこの形以外にはないとは云はないが) こゝで関数点の数をできるだけ小さくし、かつ精度を確保するためにも、Fの値を与える点の数が、精度を要求されればされるほど多くなる。また個々の点についての係数(図-2のような数値)を決定するために個々の点(着目点)について、表-4の数だけの元数の連立方程式を解かねばならない。これらは、最初に与えておけばよいが、一般には図-1の $\lambda, \mu$ は同じでなく、また異方性のときには複雑なものとなるため、問題のたびごとに解かねばならないのは、1つの不利な点であるが、FEMでのStiffness Matrixを求めるのと同様であると考えればよい。




(a) $O(\lambda^6)$ (b) $O(\lambda^8)$ (c) $O(\lambda^{10})$

図-1 式(3)の階差表現の与点 ○; w, ◉; w, F

表-4 使用できる条件数

| 所要精度 | 全体 | 一軸 | 二軸 |
|---|---|---|---|
| $O(\lambda^6)$ | 15 | 9 | 6 |
| $O(\lambda^8)$ | 28 | 16 | 10 |
| $O(\lambda^{10})$ | 45 | 25 | 15 |

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|} \hline & -1 & -1 & -1 & \\ \hline -1 & 2 & 10 & 2 & -1 \\ \hline -1 & 10 & 36 & 10 & -1 \\ \hline -1 & 2 & 10 & 2 & -1 \\ \hline & -1 & -1 & -1 & \\ \hline \end{array}\ w + \frac{\lambda^4}{2} \begin{array}{|c|c|c|} \hline & 1 & \\ \hline 1 & 2 & 1 \\ \hline & 1 & \\ \hline \end{array}\ \nabla^4 w + O(\lambda^8) = 0$$

図-2 Hermite FDM 係数の例

(1)と境界条件を用いて、消去した後の式

$$\bar{B} f^{(n)} + \bar{A} f = 0 \qquad (4)$$

を構造系全体の釣合条件式に代入したものは

$$A \cdot W + B \cdot F = 0 \qquad (5)$$

$A, B$;(4)より作成される係数行列, $W, F$;平板のたわみ、荷重のベクトル

計算結果は講演当日にゆずる。


1) 日高孝次;数値積分法, 昭18
2) Collatz ; The Numerical Treatment of Differential Equations. 3rd ed.,(1966)
3) 井 上 ; Hermitian 階差法による構造物の解析 第25回土木学会年次学術講演会 I,345 (1970)
4) 井 上 ; Hermite 階差法による構造物の固有振動解析, 第26回土木学会年次学術講演会 I,377 (1971)
5) Collatz ; Das Mehrstellenverfahren bei Plattenaufgaben, Z.a.M.M.,Bd.30,S.385,(1950)
6) Zurmühl,R. ;Behandlung der Plattenaufgabe nach dem verbesserten Differenzenverfahren,Z.a.M.M.,Bd.37,(1957)
7) Hansteen,H.;Higher Order Difference Technique in the Theory of Cylindrical Shells,Theory of Arch Dams,1964
8) Noor,A.K. ; Noncircular Cylinder Vibration by Multilocal Method, Proc.ASCE,EM2,p.389,April (1973)