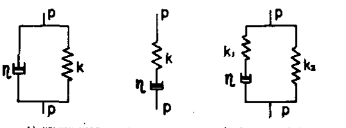
I-146　粘弾性バネ基礎上の平板の数値解析.

大阪市立大学　正員　倉田宗章
○明石工業高専　正員　高端宏直
大阪市立大学　正員　谷平勉

1. まえがき…… 粘弾性バネ基礎上の平板の解析についてはKerr[1]等によってもなされ，また紹介されている．本報告ではFreudenthal[2]等によって線形粘弾性バネ上の梁の解析に用いられた Kelvin, Maxwell, Standard solid の３種のWinkler形のModel（図-1）上の周辺自由な平板（図-2）について近似解法を示した．またtensionless のバネについても比較検討した．バネと平板とは鉛直バネ反力のみが介在するものとし，荷重はTime-independent load として解析し，たわみ，バネ反力，平板の浮上りについても検討した。

2. 解析法……平板の基礎方程式にバネ反力の項を加味して，それぞれの微分方程式を求めた．平板解析（一定時間について）は中央差分法を用い時間軸方向には初期値問題としてEulerの前進差分法で差分表示した．バネ反力 p や曲げモーメント M_x… もたわみ $\{w\}$ で表わし（表-1），辺長や時



1) KELVIN MODEL.　2) MAXWELL MODEL.　3) STANDARD SOLID MODEL.
Fig.1　VISCO-ELASTIC FOUNDATION MODEL

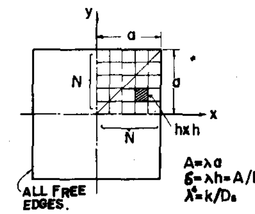


Fig.2　DIMENSION OF THE PLATE.

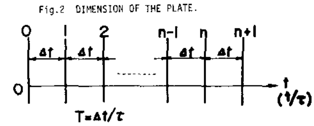


Fig.3　TIME ABSCISSA.

表-1．各種解式のまとめ.

Model		Kelvin	Maxwell	Standard Solid
微分方程式		$\nabla^4 w + \frac{\eta}{D_s}\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k}{D_s} w = \frac{\bar{q}}{D_s}$,	$\left(1+\frac{\eta}{k}\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + \frac{\eta}{D_s}\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\bar{q}}{D_s}$,	$D_s\left(\frac{1}{\tau'} + \left(1-\frac{\eta}{k_2\tau'}\right)\frac{\partial}{\partial t}\right)\nabla^4 w + k_2\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k_1}{\tau'} w = \frac{\bar{q}}{\tau'}$,
バネ反力		$p = \eta\frac{\partial w}{\partial t} + k w$,	$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{1}{k}\cdot\frac{\partial p}{\partial t} + \frac{1}{\eta} p$,	$p_2 = k_2 w$,　$p = p_1 + p_2$, $\frac{\partial p_2}{\partial t} + \frac{1}{\tau'} p_1 = \frac{\eta}{k_2\tau'}\cdot\frac{\partial p}{\partial t}$, $\frac{p}{\eta} + \frac{1}{k_1}\frac{\partial p}{\partial t} = \left(1+\frac{k_2}{k_1}\right)\frac{\partial w}{\partial t} + \frac{k_2}{\eta} w$,
τ, τ', T		$\tau = \eta/k$,　$T = \Delta t/\tau$	$\tau = \eta/k$, $T = \Delta t/\tau$,	$\tau' = (k_1+k_2)/k_1 k_2 \cdot \eta$, $k_1 = k_2 = k \rightarrow \tau' = 2\tau$, $T = \Delta t/\tau$
差分表示	たわみ	$([K] + (1+\frac{1}{T})[\gamma])\{w\}^n = \{\bar{q}\} + \frac{1}{T}[\gamma]\cdot\{w\}^{n-1}$, $\bar{q}_i = \frac{P\lambda^2}{k}(\alpha\gamma + \beta\gamma^{1/2})$……i点,	$((1+\frac{1}{T})[K] + \frac{1}{T}[\gamma])\{w\}^n$ $= \{\bar{q}\} + \frac{1}{T}([K] + [\gamma])\{w\}^{n-1}$,	$k_1 = k_2 = k$ のとき. $((1+\frac{1}{T})[K] + (1+\frac{2}{T})[\gamma])\{w\}^n = \{\bar{q}\} + \frac{1}{T}\cdot$ $([K] + 2[\gamma])\{w\}^{n-1}$,
	バネ反力	$\left\{\frac{p}{k}\right\}^n = (1+\frac{1}{T})\{w\}^n - \frac{1}{T}\{w\}^{n-1}$,	$\left\{\frac{p}{k}\right\}^n = \frac{1}{1+T}\left(\left\{\frac{p}{k}\right\}^{n-1} + \{w\}^n - \{w\}^{n-1}\right)$,	$k_1 = k_2 = k$ $\left\{\frac{p}{k}\right\}^n = \frac{1}{1+T}\left(\left\{\frac{p}{k}\right\}^{n-1} - 2\{w\}^{n-1}\right) + \frac{2+T}{1+T}\{w\}^n$
初期条件		$t=0$, $n=0$: $\{w\}^n = 0$	$t=0$, $n=0$. : $\{w\}^n = \{w\}_{Winkler}$, $\left\{\frac{p}{k}\right\}^n = \{w\}_{Winkler}$,	$k_1 = k_2 = k$ $t=0$, $n=0$: $\{w\}^n = \{w\}_{Winkler}/2$, $\left\{\frac{p}{k}\right\}^n = \{w\}_{Winkler}$.

注. $\{w\}_{Winkler}$: $\eta=0$の従来のWinklerバネの場合のたわみ量.　曲げモーメント式 M_x, M_y, M_{xy} は省略する.

〔使用記号〕D_s：板剛度，λ：長さを無次元化するための量（$=\sqrt[4]{k/D_s}$（1/cm）），h, δ：分格長と無次元分格長，a, A：半辺長と無次元半辺長（$=\lambda a$），N：分割数，P, q：集中荷重（kg）と等分布荷重（kg/cm²），$\bar{q}$：格点荷重強度（kg/cm²），α：荷重比（$=q/P\lambda^2$），β：集中荷重の位置による係数，γ：（$=\delta^4 = (A/N)^4$），$p, \{p\}$：バネ反力（kg/cm²）と反力ベクトル，k, k_1, k_2：バネ定数（kg/cm³），η：バネの粘性係数（kg/cm³t），t：時間，τ：遅延および緩和時間（$=\eta/k$），$\Delta t, T$：分格時間間隔と無次元化したもの（$=\Delta t/\tau$），$[K]$：差分表示のための係数マトリックス，$[\gamma]$：γを要素とする主対角マトリックス，$w, \{w\}$：たわみとたわみベクトル.

間は無次元化して表わした．負の反力を考えない場合については文献(3)にも示した逐次近似解法によった．(フローチャート は省略する．)

3．数値計算例・・・・ここでは図-1,3)のバネ定数は $k_1=k_2=k$ とし，初期条件は表-1に示した（図-3参照）．本例では計算機の都合で N=8 とし，曲げモーメントの計算も省略した．図-4は各バネモデルについて，平板の中央点に集中荷重Pが作用した場合（$\alpha=0, \beta=1.0$）で$T=0.3$ と$D=1.0, 3.0$の2つについて載荷点下のたわみと地盤反力について描いた．各モデルの特性が表わされている．いずれも tensionless の場合である．図-5,6,7は中央集中荷重載荷で$T=0.3$, $D=3.0$の場合について，板の対角線上のたわみとバネ反力を $t/\tau=0$ から 6.0 まで描いたものである．破線はバネの tension を考えた場合である．Kelvin形の場合はたわみやバネ反力はWinkler形の場合の値に収束する．Maxwell形の場合はたわみは線形的に時間と共に増大し発散するが，バネ反力は一定値に収束する傾向にある．Standard Solid形の場合もたわみやバネ反力は収束するが，バネ反力の大きな変化はみられない．図-8は分割時間間隔Tを0.1, 0.3, 0.5と変化させた場合（Standard Solid形で中央集中荷重載荷で中央点のたわみ量を示す．）を示した．途中はTによりやゝ差異がみられるが，t/τが大きくなると同じように収束しているようである．初期値問題については更に検討の必要があろう．図-9は各タイプの$t/\tau=3.0$ で $\bar{q}=0$（ここでは$\beta=1.0$）と除荷した場合である．$t/\tau=3.0$近傍での問題は別として，傾向としてはいずれも除荷後0に収束している．載荷状態はいまゝでと同じで，tension を考慮した場合である．図-8と同様板中央点のたわみを示した．

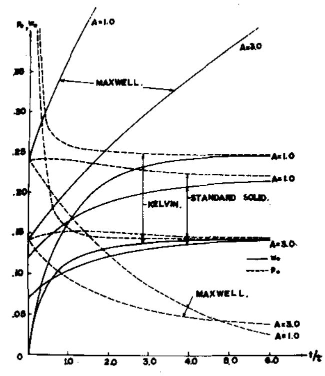


Fig.4 w_0-t AND p_0-t CURVES ABOUT EVERY TENSIONLESS FOUNDATION.
COEFF: $P\lambda^2/k$ (w_0), $P\lambda^2$(p_0)
N=8, β=1.0, α=0, T=0.3.

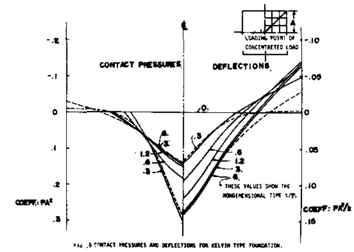


Fig.5 CONTACT PRESSURES AND DEFLECTIONS FOR KELVIN TYPE FOUNDATION.
N=8, β=1.0, α=0, A=3.0, T=0.3.
(DOTTED LINES SHOW THE CASE OF THE FOUNDATION WITH TENSION.)

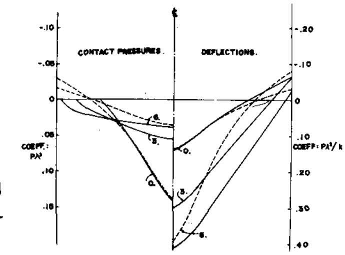


Fig.6 CONTACT PRESSURES AND DEFLECTIONS FOR MAXWELL TYPE FOUNDATION.
(N=8, β=1.0, α=0, A=3.0, T=0.3)

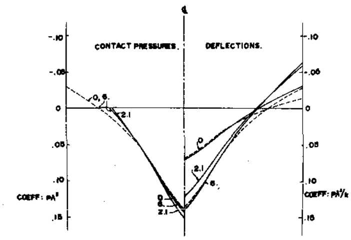


Fig.7 CONTACT PRESSURES AND DEFLECTIONS FOR STANDARD SOLID TYPE FOUNDATION.
(N=8, β=1.0, α=0, A=3.0, T=0.3)

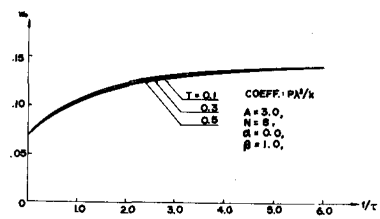


Fig.8 RELATIONSHIP BETWEEN w_0(DEFLECTION AT PLATE CENTER) AND T(NONDIMENSIONAL TIME INTERVAL) IN THE CASE OF TENSIONLESS STANDARD SOLID TYPE FOUNDATION.

4．むすび・・・・以上，粘弾性モデルについてのべたが，たわみ，バネ反力ともにそれぞれの特性が表われていた．tensionlessの場合と比較して，中央点近傍のたわみやバネ反力は大差ないが，周辺部の浮上りの状況には大きな差異がみられるようである．精度については比較検討しにくいが，分割数Nの増加，時間方向の差分表示を検討すれば実用上からは充分な精度をうるものと考えられる．

今後，曲げモーメントの検討，分割数の拡張，初期値問題の再検討，バネ基礎が非線形化した場合についても調べる予定である．

以上．

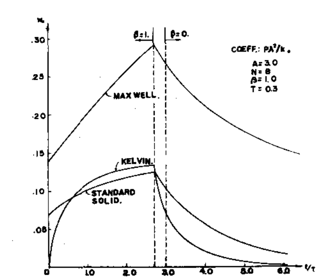


Fig.9 RELATIONSHIP BETWEEN w_0 AND t IN THE CASE OF UNLOADING.

〔参考文献〕 1) A.D.Kerr: Elastic and Viscoelastic Foundation Models, Jour. of Applied Mechanics, Trans. of the A.S.M.E, Sep.1964
2) A.M.Freudenthal, H.G.Lorsch: The Infinite Elastic Beam on a Linear Viscoelastic Foundation, Proc. of A.S.C.E EM1, Jan, 1957.
3) 倉田，高端，谷平：非線形バネ基礎上の周辺自由な平板の数値解析．土木学会論文報告集，第208号，1972．