I-143 部分荷重を受ける厚板の応力と変形について

大阪市立大学 工学部 正員 倉田宗章
大阪市立大学 工学部 正員○堀川都志雄

1. はしがき；

厚板の解析を行うにあたって、3次元弾性論を無視することは出来ない。まず、3次元弾性論の解法としては、i) Maxwell－Morera に代表される応力ポテンシァルを用いるもの[1]、ii) Boussinesq に代表される変位ポテンシァルを用いるもの[2]があり、ii) に注目すると、① 3重フーリェ級数を用いる K.T.R.S.Iyengar らの解析、② Hankel変換を用いる I.N.Sneddon，牟岐，斎藤，宮本[3]らの解析，③ 有限フーリェ変換を用いる能町[4]の解析，④ いわゆる Integral method を用いる岡村・島田[5]の解析，⑤ 3次元有限要素を用いる有限要素法、等の種々のものが研究されている。一方、従来からの薄板理論を修正改良して、厚板の解析に適用しようとする理論展開も少なくない。二，三の例としては、ⓐ 縦方向のセン断変形を考慮した E.Reissner による理論[6]、ⓑ σ_z の分布型のみを仮定する A.Kromm による理論、ⓒ 平面応力状態を用いる A.E.H.Love による理論，ⓓ *load-function* のみを仮定する K.Hata による理論[7]、等が発表されている。

本題においては、周辺単純支持されている板が、中央部に部分荷重を受けた場合、従来の薄板理論, Reissner 理論の限界を3次元弾性論に基づく厚板理論から、数値的に検討しようとするものである。

2. 各理論式；

各理論式の誘導等については、紙面の都合上省略する。結果のみを記す。

A). Reissner 理論

上面載荷荷重のみが作用する場合	body－force のみが作用する場合
$D\cdot\Delta\Delta W = q - \frac{(2-\nu)\cdot h^2}{10\cdot(1-\nu)}\Delta q$	$D\cdot\Delta\Delta W = B_z h - \frac{(12-\nu)\cdot h^3}{60\cdot(1-\nu)}\cdot\Delta B_z$
$\frac{h^2}{10}\Delta Q_x - Q_x = D\cdot\frac{\partial\Delta W}{\partial x} + \frac{h^2}{10}\cdot\frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{\partial q}{\partial x}$	$\frac{h^2}{10}\cdot\Delta Q_x - Q_x = D\cdot\frac{\partial\Delta W}{\partial x} + \frac{(6-5\nu)\cdot h^3}{60\cdot(1-\nu)}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial x}$
$\frac{h^2}{10}\Delta Q_y - Q_y = D\cdot\frac{\partial\Delta W}{\partial y} + \frac{h^2}{10}\cdot\frac{1}{1-\nu}\cdot\frac{\partial q}{\partial y}$	$\frac{h^2}{10}\cdot\Delta Q_y - Q_y = D\cdot\frac{\partial\Delta W}{\partial y} + \frac{(6-5\nu)\cdot h^3}{60\cdot(1-\nu)}\cdot\frac{\partial B_z}{\partial y}$
$M_x = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\frac{h^2}{5}\cdot\frac{\partial Q_x}{\partial x}-\frac{\nu\cdot h^2}{10\cdot(1-\nu)}\cdot q$	$M_x = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)+\frac{h^2}{5}\cdot\frac{\partial Q_x}{\partial x}-\frac{11\cdot\nu\cdot h^3}{60\cdot(1-\nu)}\cdot B_z$
$M_y = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)+\frac{h^2}{5}\cdot\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{\nu\cdot h^2}{10\cdot(1-\nu)}\cdot q$	$M_y = -D\cdot\left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}+\nu\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)+\frac{h^2}{5}\cdot\frac{\partial Q_y}{\partial y}-\frac{11\cdot\nu\cdot h^3}{60\cdot(1-\nu)}\cdot B_z$
$M_{xy} = -(1-\nu)\cdot D\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} + \frac{h^2}{10}\cdot\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)$	$M_{xy} = -(1-\nu)\cdot D\cdot\frac{\partial^2 W}{\partial x\partial y} + \frac{h^2}{10}\cdot\left(\frac{\partial Q_x}{\partial y}+\frac{\partial Q_y}{\partial x}\right)$

B). 厚板理論 ---- 変位ポテンシァルの中の *Galerkin－vector* を用いる。

$$\left.\begin{aligned}
&u=(1/2G)\left[2(1-\nu)\Delta X-(\partial/\partial x)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F}\right],\ v=(1/2G)\left[2(1-\nu)\cdot\Delta Y-(\partial/\partial y)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F}\right],\ w=(1/2G)\cdot\left[2(1-\nu)\cdot\Delta Z-(\partial/\partial z)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F}\right]\\
&\sigma_x=2(1-\nu)\cdot\partial\Delta X/\partial x+(\nu\cdot\Delta-\partial^2/\partial x^2)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F},\ \sigma_y=2(1-\nu)\cdot\partial\Delta Y/\partial y+(\nu\cdot\Delta-\partial^2/\partial y^2)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F},\ \sigma_z=2(1-\nu)\partial\Delta Z/\partial z+(\nu\cdot\Delta-\partial^2/\partial z^2)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F}\\
&\tau_{xy}=(1-\nu)\cdot(\partial\Delta X/\partial y+\partial\Delta X/\partial x)-(\partial^2/\partial x\partial y)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F},\ \tau_{yz}=(1-\nu)\cdot(\partial\Delta Y/\partial z+\partial\Delta Z/\partial y)-(\partial^2/\partial y\partial z)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F},\ \tau_{xz}=(1-\nu)(\partial\Delta X/\partial z+\partial\Delta Z/\partial x)-(\partial^2/\partial x\partial z)\cdot\mathrm{div}\,\mathbb{F}
\end{aligned}\right\}\quad(1)$$

$$\Delta\Delta\mathbb{F} = -\mathbb{B}/(1-\nu) \qquad (2)$$

ここで、 D；板の曲げ剛度，h；板厚，ν；ポアソン比，G；セン断弾性定数，Δ；*Laplace's operator*

$\mathbb{F}=X\cdot\mathbb{i}+Y\cdot\mathbb{j}+Z\cdot\mathbb{k}$；*Galerkin－vector*，$\mathbb{B}=B_x\mathbb{i}+B_y\mathbb{j}+B_z\mathbb{k}$；*body-force*

1). I.S.Sokolnikoff, Mathematical theory of elasticity. 2). H.W.Westergaard, Theory of elasticity and plasticity.

3). 宮本博，三次元弾性論，裳華房

4). S.Nomachi, "On one method for solving three-dimensional stress problems by means of finite Fourier transformation" Pro. 6th. Jap. Nat. Cong. Appl. Mech, 1956.

5). 岡村宏一・島田功，"3次元弾性問題の一数値解法とその応用"，土木学会論文集，Vol.199，p33，昭47.

3. 数値計算例；

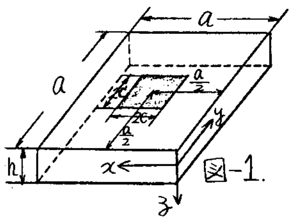


図-1.に示すような板が、周辺単純支持されており、板の中央部において部分荷重 q（荷重面積 $2c \times 2c$）を受けた場合を示す。

ここで、 $a=1.0$, $\nu=0.3$, $\delta=h/a$, E；ヤング率, $D=\frac{Eh^3}{12\cdot(1-\nu^2)}$, B_z；z方向のbody-force

実線；厚板理論，破線；Reissner理論，一点鎖線；薄板理論．

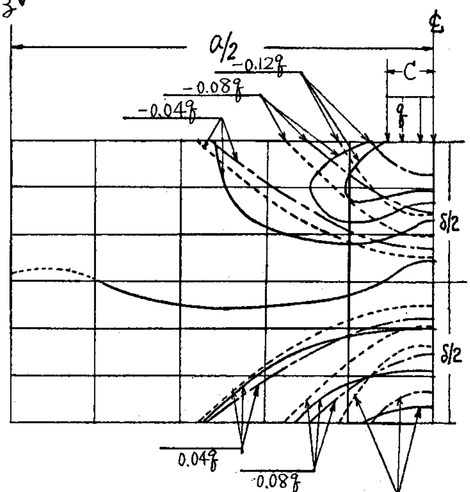


図-2. 部分荷重qによるσ_xのContour ($c/a=0.1$, $\delta=0.3$, $y/a=0.5$)

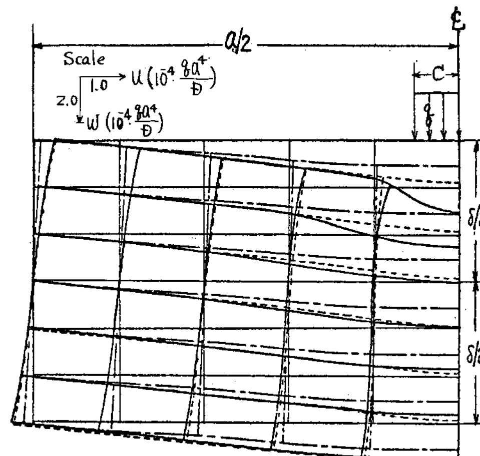
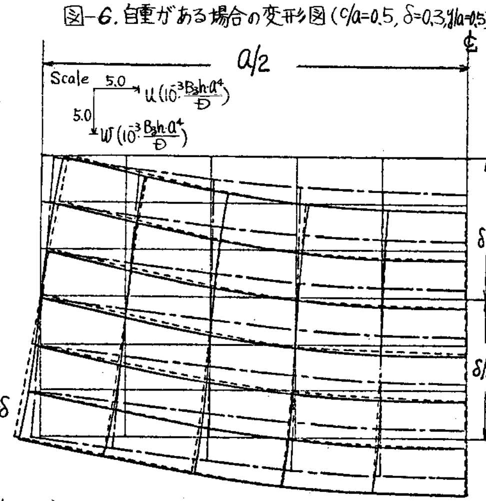


図-3. 部分荷重による変形図 ($c/a=0.1$, $\delta=0.3$, $y/a=0.5$)

図-6. 自重がある場合の変形図 ($c/a=0.5$, $\delta=0.3$, $y/a=0.5$)



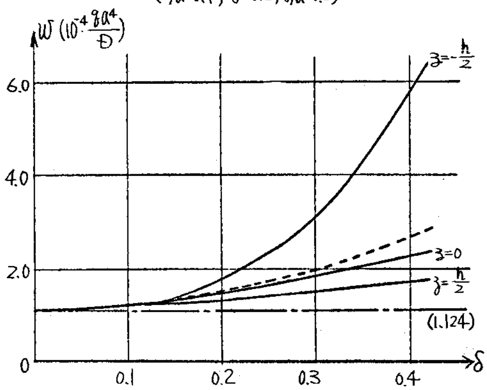
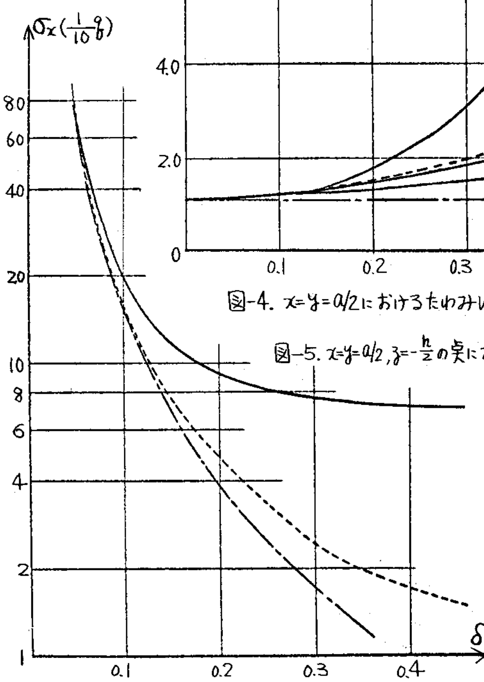


図-4. $x=y=a/2$におけるたわみwの比較 ($c/a=0.1$)

図-5. $x=y=a/2$, $z=-\frac{h}{2}$の点におけるσ_xの比較 ($c/a=0.1$)



4. むすび；

薄板理論は $\delta=0.1$以下で、Reissner理論は $\delta=0.15$以下の範囲で適用されるべきであり、荷重点近傍のたわみw, 応力σ_xの卓越する現象を表現できないことが分った。他の載荷状態については、当日発表する。

6) E. Reissner, "The effect of transverse-shear deformation on the bending of elastic plates." J.A.M. vol 12, 1945, p69.

7) K. Hata, "On the thick plate Problem." 北大工学部研究報告, 通巻41号, 昭28, p428