I-87　弾性支承上のＰＣ連結桁のクリープ二次モーメントの解析

九州大学工学部　正会員　彦坂　熙
〃　〃　学生員　○小八重憲明

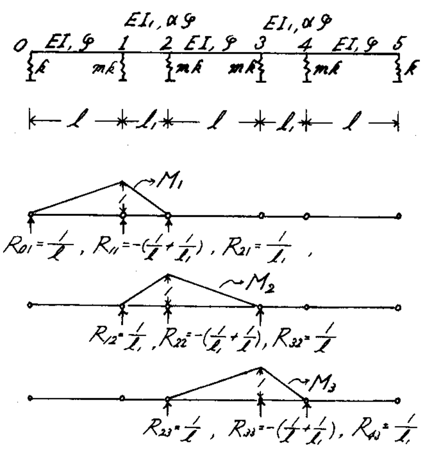
１、緒言

最近、プレキャストＰＣ単純桁を橋脚上で連結する形式の橋梁が架設されている[1]。連結部に於けるＰＣ単純桁は、両桁端を連結用場所打コンクリートの施工に必要な間隔をおいて配置され、支承にはゴム板が用いられる。架設当初、死荷重およびプレストレスは単純桁としての主桁に作用するが、桁連結後は連続桁となるためコンクリートのクリープによる支点上の回転が拘束され、２次不静定モーメントが発生する。現在の設計では、同一橋脚上の２個のゴム支承を１個の剛支承に置換した略算[2]が行なわれているが、本論では、ゴム支承をHookeの法則に従う弾性支承と考え、その弾性変形を考慮した２次不静定モーメントの解析を行った。

２．微分方程式

クリープによる２次モーメントの計算を開始する時を時間tの基準にとる。図－１のごとく、プレキャストＰＣ桁のスパンl、中間橋脚上の支承間隔l_1なる５径間連結桁を考え、支点番号０，１，２，…，５を付す。プレキャスト部の曲げ剛性とクリープ係数をそれぞれEI，$\varphi(t)$，場所打ち部のそれらをEI_1，$\alpha\varphi(t)$，（αは定数）とし，クリープには慣用のWhitneyの法則を仮定する。支点iの弾性支承のばね定数を，端支点０および５で$k_i=k$，中間の支点で$k_i=mk$（mは定数）とする。

計算開始時刻$t=0$には，この構造の不静定力は零であるが，任意時刻tには，支点iにX_{it}（$i=1,2,3,4$）の２次不静定力が生ずる。いま，図－１の４次不静定連続桁の中間支点1,2,3,4,にヒンジを挿入した静定基本系に於いて，支点iに単位モーメントを作用させた場合の曲げモーメントをM_i，支点rの反力をR_{ri}とする。微小時間dtに於けるクリープ係数の微小変化$d\varphi$による中間支点１，２の相対たわみ角の変化$d\theta_1$，$d\theta_2$はそれぞれ次式で表わされる。



図―１

$$d\theta_1=\overline{\delta_{11}}dX_{1t}+\overline{\delta_{12}}dX_{2t}+\overline{\delta_{13}}dX_{3t}+X_{1t}(\delta_{11}^{l}+\alpha\delta_{11}^{l_1})d\varphi+X_{2t}\delta_{12}\alpha d\varphi$$
$$+(\delta_{10}^{l}+\alpha\delta_{10}^{l_1})d\varphi \qquad (1)$$

$$d\theta_2=\overline{\delta_{21}}dX_{1t}+\overline{\delta_{22}}dX_{2t}+\overline{\delta_{23}}dX_{3t}+\delta_{24}^{s}dX_{4t}+X_{1t}\delta_{21}\alpha d\varphi+X_{2t}(\delta_{22}^{l}+\alpha\delta_{22}^{l_1})d\varphi$$
$$+X_{3t}\delta_{23}d\varphi+(\delta_{20}^{l}+\alpha\delta_{20}^{l_1})d\varphi \qquad (2)$$

ここに　$\delta_{ii}^{l}=\int_0^{l}\frac{M_i^2}{EI}dx$，　$\delta_{ii}^{l_1}=\int_0^{l_1}\frac{M_i^2}{EI_1}dx$，　$\delta_{ii}^{s}=\sum_{r=i-1}^{i+1}\frac{R_{ri}^2}{k_r}$，　$\overline{\delta_{ii}}=\delta_{ii}^{l}+\delta_{ii}^{l_1}+\delta_{ii}^{s}$

$\delta_{12}=\delta_{21}=\int_0^{l_1}\frac{M_1M_2}{EI_1}dx$，　$\delta_{23}=\int_0^{l}\frac{M_2M_3}{EI}dx$

$\delta_{i,i+1}^{s}=\delta_{i+1,i}^{s}=\sum_{r=i}^{i+1}\frac{R_{r,i}R_{r,i+1}}{k_r}$，　$\overline{\delta_{i,i+1}}=\overline{\delta_{i+1,i}}=\delta_{i,i+1}+\delta_{i,i+1}^{s}$

$\delta_{i,i+2}^{s}=\frac{R_{i+1,i}R_{i+1,i+2}}{k_{i+1}}$，　$\delta_{i,0}^{l}=\int_0^{l}\frac{M_iM_0}{EI}dx$，　$\delta_{i,0}^{l_1}=\int_0^{l_1}\frac{M_iM_0}{EI_1}dx$

ただし，M_0は連結時以前から作用している死荷重およびプレストレスによる静定基本系の曲げモーメント。
図－１の連結桁は対称構造であるが，さらに簡単のため，プレストレスおよび死荷重も対称とすれば$X_{3t}=X_{2t}$，

$X_{it}=X_t$ となる。又，$\delta_{ii}^{\ell}+\alpha\delta_{ii}^{\ell_1}=\delta_{ii}'$，$\delta_{i0}^{\ell}+\alpha\delta_{i0}^{\ell_1}=\delta_{i0}'$ とおき，$\delta_{21}=\delta_{12}$，$\delta_{24}=\delta_{13}$ なることを考慮のうえ，変形の適合条件より $d\theta_1=0$，$d\theta_2=0$，とすれば次の連立微分方程式が導かれる。

$$\left.\begin{aligned}
&\overline{\delta}_{11}\frac{dX_{1t}}{d\varphi}+(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})\frac{dX_{2t}}{d\varphi}+\delta_{11}'X_{1t}+\alpha\delta_{12}X_{2t}+\delta_{10}'=0\\
&(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})\frac{dX_{1t}}{d\varphi}+(\overline{\delta}_{22}+\overline{\delta}_{23})\frac{dX_{2t}}{d\varphi}+\alpha\delta_{12}X_{1t}+(\delta_{11}'+\delta_{23})X_{2t}+\delta_{20}'=0
\end{aligned}\right\}\quad(3)$$

3．2次不静定モーメントの解

式(3)の連立微分方程式は次の形に書き変えることができる。

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dX_{1t}}{d\varphi}&=a_1X_{1t}+b_1X_{2t}+C_1\\
\frac{dX_{2t}}{d\varphi}&=a_2X_{1t}+b_2X_{2t}+C_2
\end{aligned}\right\}\quad(4)$$

ここに $a_1=\{\alpha\delta_{12}(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})-\delta_{11}'(\overline{\delta}_{22}+\overline{\delta}_{23})\}/C$，　$a_2=\{\delta_{11}'(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})-\alpha\overline{\delta}_{11}\delta_{12}\}/C$

$b_1=\{(\delta_{11}'+\delta_{23})(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})-\alpha\delta_{12}(\overline{\delta}_{22}+\delta_{23})\}/C$，　$b_2=\{\alpha\delta_{12}(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})-\overline{\delta}_{11}(\delta_{11}'+\delta_{23})\}/C$

$C_1=\{(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})\delta_{20}'-(\overline{\delta}_{22}+\overline{\delta}_{23})\delta_{10}'\}/C$，　$C_2=\{(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})\delta_{10}'-\overline{\delta}_{11}\delta_{20}'\}/C$

$$C=\overline{\delta}_{11}(\overline{\delta}_{22}+\overline{\delta}_{23})-(\overline{\delta}_{12}+\delta_{13}^{s})^2$$

式(4)の厳密解は次のように求められる。

$$\left.\begin{aligned}
X_{1t}&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{\lambda_2Q_1}{P_1}(1-e^{P_1\varphi})-\frac{\lambda_1Q_2}{P_2}(1-e^{P_2\varphi})\right\}\\
X_{2t}&=\frac{1}{\lambda_1-\lambda_2}\left\{\frac{Q_2}{P_2}(1-e^{P_2\varphi})-\frac{Q_1}{P_1}(1-e^{P_1\varphi})\right\}
\end{aligned}\right\}\quad(5)$$

ここに　$\left.\begin{matrix}\lambda_1\\ \lambda_2\end{matrix}\right\}=\frac{1}{2a_2}\{(b_2-a_1)\pm\sqrt{(a_1-b_2)^2+4a_2b_1}\}$

$P_i=a_1+\lambda_ia_2$，　$Q_i=C_1+\lambda_iC_2$

4．計算例

スパンℓの3本のプレキャストPC桁を連結した図－1の対称構造について，死荷重およびプレストレスによるクリープ二次モーメントをそれぞれ算定し，弾性支承のばね定数k，内部支承と端支承のばね定数比m，および内部支承の間隔ℓ_1の影響を吟味するとともに，同一橋脚上の2個の弾性支承を1個の剛支承に置き換えた略算による結果と比較した。ただし，桁の曲げ剛性EIおよびクリープ係数φは全長にわたり一定とする。図－2および図－3は$\ell_1=\frac{1}{20}\ell$，$\varphi=1.5$の場合について，等分布死荷重(g)およびプレキャストPC桁の一様プレストレスモーメント($-M_0$)による二次不静定モーメントX_{1t}，X_{2t}が$\beta=k\ell^3/EI$の増加により変化する模様を，mをパラメーターとしてプロットしたものである。又，$m=2$，$\varphi=1.5$の場合につき，ℓ_1/ℓを$\frac{1}{40}$～$\frac{1}{8}$の範囲で変化させてプレストレスによるX_{1t}，X_{2t}を求め，結果を表－1にまとめて示した。

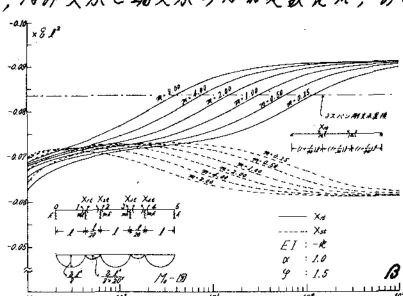


図-2　死荷重による二次モーメント

表－1　プレストレスによる二次モーメント　(単位M_0)

β \ ℓ_1/ℓ	0.025		0.050		0.075		0.100		0.125	
	X_{1t}	X_{2t}	X_{1t}	X_{2t}	X_{1t}	X_{2t}	X_{1t}	X_{2t}	X_{1t}	X_{2t}
10	.844	.854	.816	.835	.791	.815	.767	.797	.745	.778
10^2	.897	.899	.879	.868	.867	.834	.860	.800	.854	.767
10^3	.942	.878	.978	.809	.991	.759	.984	.724	.969	.698
10^4	1.065	.797	1.073	.747	1.050	.720	1.023	.699	.995	.681
∞	1.128	.755	1.092	.734	1.059	.715	1.028	.696	.998	.679

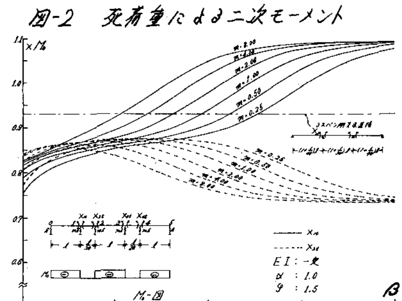


図-3　プレストレスによる二次モーメント

参考文献　1)桜永他：PCプレテンション桁を連結構造として使用した古川3号避溢橋の設計と施工について，プレストレスコンクリート，Vol.15，No.2．昭和48年4月，　2)日本道路協会：PC道路橋示方書解説　昭和43年3月