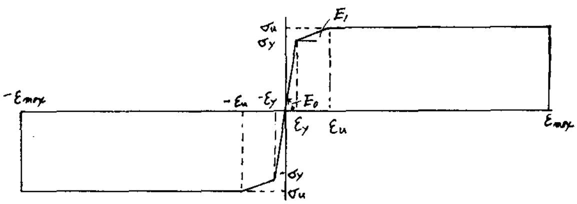
I-73　はりの曲げ（降伏を越える）によって生じる支点の水平反力について

岐阜大学大学院　学生員○佐藤幹雄
岐阜大学工学部　正員　井上肇

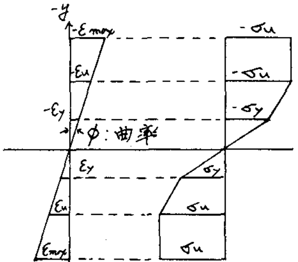
序　はりに過大荷重が載荷された場合には，はり部材は弾塑性状態になると考えられる。このような状態においては、応力とひずみとは線形関係とはならない。本研究は単純ばりに過大荷重、及び支承に拘束（摩擦、支承の移動量が限定あるいは外力による）を加え、曲げモーメントと軸力とを受ける鋼部材の材料的非線形問題[1]を解析することにより支承の拘束力を求めようとするものである。解析にあたっては、応力、ひずみ、力、変形の相互関係式を求め、与荷重に対する微分方程式の解を繰り返し計算によって連続的に追跡し決定する。他に有限要素法によっても解析できるが、ここでは電子計算機による数値計算による方法を用いることにした。

応力－ひずみ分布式

鋼材の応力－ひずみ図をⅠ図のごとく仮定する。仮定に基づいて応力－ひずみ及び、曲率：ϕ，y（Ⅱ図参照）の関係式は、表Ⅰのようになる。



Ⅰ図



Ⅱ図

表Ⅰ

$-\varepsilon_y \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_y$	$\sigma = E_0\varepsilon = E_0\phi y$
$\varepsilon_y \leqq \varepsilon \leqq \varepsilon_u$	$\sigma = \bar{\sigma}_y + E_1\varepsilon = \bar{\sigma}_y + E_1\phi y$
$-\varepsilon_u \leqq \varepsilon \leqq -\varepsilon_y$	$\sigma = -\bar{\sigma}_y + E_1\varepsilon = -\bar{\sigma}_y + E_1\phi y$
$\varepsilon_u \leqq \varepsilon$	$\sigma = \sigma_u$
$\varepsilon \leqq -\varepsilon_u$	$\sigma = -\sigma_u$

ただし

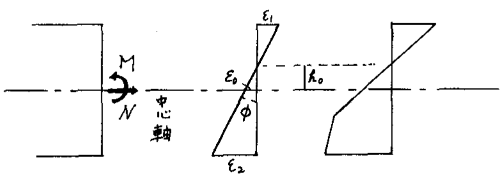
$$\bar{\sigma}_y = E_0\varepsilon_y - E_1\varepsilon_y$$

$$\sigma_u = E_0\varepsilon_y + E_1(\varepsilon_u - \varepsilon_y)$$

断面力と曲率[2]

軸力Nと曲げモーメントMを受けるはりにおいて、断面における外力と内力の釣合い式を求めれば次のようになる。（Ⅲ図参照）

$$N - \int\sigma dA = 0\ ,\ M - h_0N - \int\sigma y dA \quad \cdots\cdots \quad (1)$$



Ⅲ図

ただし A；はり部材の断面積

（応力の状態）

Ⅳ図

任意断面の応力分布の状態は、表Ⅰに示された応力－ひずみ関係式により決定される。(Ⅳ図参照)
任意のM，Nに対してどの応力分布の状態になるかを決定するため、各状態についてのNに対するMの極限値を求めておく。つぎに平面保持を仮定すれば次式が成立する。

$$\phi = -\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} \qquad \cdots\cdots (2)$$

(2)式において$(dy/dx)^2$の項は問題が大きな変形を前提としているため考慮しなければならなくなる。N，Mが与えられれば(1)式の連立方程式を解き(未知数としてV，φ，あるいは$\phi=\varepsilon_y/V_y$としてV, V_y。あらかじめ応力分布状態は決定しておく)、(2)式により変形を求める。たとえばⅤ図(b)のような状態をもつ長方形断面においては、次式が成立する。

$$\left.\begin{aligned} N &= \frac{b}{2}\left[E_0\phi\left\{V_y^2-(h-V)^2\right\}+2\sigma_y(V-V_y)+E_1\phi(V^2-V_y^2)\right] \\ M &= b\left[\frac{E_0\phi}{3}\left(V_y^3+(h-V)^3\right)+\frac{\sigma_y}{2}(V^2-V_y^2)+\frac{E_1\phi}{3}(V^3-V_y^3)\right]-N\left(V-\frac{h}{2}\right)\end{aligned}\right\} \cdots\cdots (3)$$

(3)式よりV，φ，およびV_yを求める。次に(Ⅴ図(d)参照)

$$M=\frac{1}{2}qx(l-x)-N\left(y-\frac{h}{2}\right)=M(x,y) \qquad \cdots\cdots (4)$$

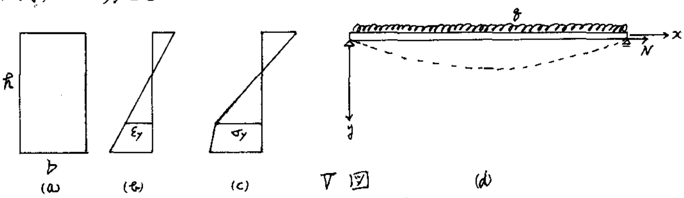
(3), (4)式より $\phi = (M(x,y)-Je)/Ie \qquad \cdots\cdots (5)$

ここに、$Ie=b\left(E_0/3\,(V_y^3+(h-V)^3)+E_1/3\,(V^3-V_y^3)\right)$，$Je=b\,\sigma_y/2\,(V^2-V_y^2)$

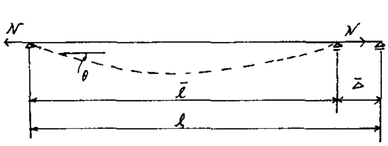
(2), (5)式より変形に関してはつぎのような非線形の微分方程式が求められる。

$$\frac{\frac{d^2y}{dx^2}}{\left\{1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right\}^{\frac{3}{2}}} = -(M(x,y)-Je)/Ie \qquad \cdots\cdots (6)$$

これは容易には積分できないためRunge-Kutta-GillおよびMilne法によって数値的にこれを解き各分割区間について与荷重に対する所要の解が得られるまで繰り返し計算を行い全区間へと連続的に追跡してゆく。
支承の移動量および拘束力を求める手順をフローチャートで示す(Ⅵ図)。



Ⅴ 図

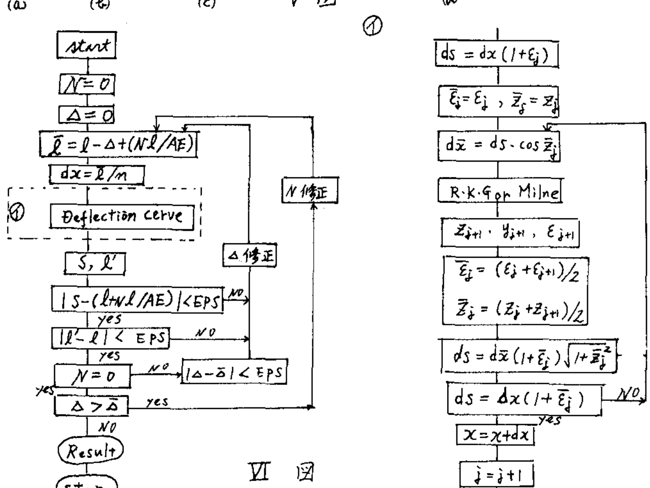


$\bar{\Delta}$: given　　n : 分割数

$\bar{l}=l-\Delta$

$l'=\int_{\bar{l}}\cos\theta\,ds$　　$S=\int_{\bar{l}}ds$

$z:\theta$



Ⅵ 図

参考文献

1) 後藤・太田：構造物の非線形挙動の解析，土木学会誌 1973 7月

2) 太田：有限変形理論による軸力の影響を考慮したはりの弾塑性解析，土木学会第24回年次学術講演会講演集