

山口大学 学生員 佐伯 博三  
 " 正員 會田 忠義

まえがき

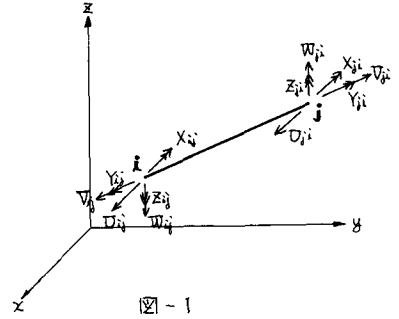
ある振動数でたわみ振動している柱の座屈荷重は、同一柱の静止時の座屈荷重に比べ小さいことは周知の通りである。これより複雑な骨組構造物の動的弾性安定問題は、構造物を単純系と仮定して考えてきたが、実際は、構造物全体を多自由度系として取り扱うことが必要である。

本稿では、変形法による弾性安定論を拡張し、ある振動数を持つ正弦波の地動を受ける骨組構造物の座屈荷重の決定法を明らかにし、その動的弾性安定論の適用例として、アレー・スドリアーチおよび充膜アーチの計算結果を示す。本研究では、振動振幅が無限大になる状態を座屈とよぶことにする。解析に当たっての仮定は、前出の報告「骨組構造物の動的弾性安定について」(會田・佐伯)の仮定(ただし④は除く)と同じである。

動的弾性安定論

正弦波からなる地動変位を受け、振動数で振動中の構造物に作用する境界荷重が作用し、分岐点近傍の限界つりあい状態にある構造物に微小変位を加えて座屈荷重を想定する。

構造物の一部を \$j\$ ととりだし、各節点に節点変位、節点回転角が生ずると、\$i\$ 節点には、せん断力 \$U\_{ij}\$、\$W\_{ij}\$、軸力 \$V\_{ij}\$、端モーメント \$X\_{ij}\$、\$Y\_{ij}\$、ねじりモーメント \$Z\_{ij}\$ が生ずる。又、\$j\$ 節点に作用する地動を受けている構造物の座屈前の微小変位状態における動的つりあい条件式は次式で表わされる。ただし節点軸は \$y-z\$ 面に平行である場合を考える。



$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^m U_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) - X_{ij} + m_i \frac{d^2 \bar{U}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Z}}{dt^2} \\ & \sum_{i=1}^m \{V_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \mu_{ij}(\xi) - W_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \nu_{ij}(\xi)\} - Y_{ij} - m_i \frac{d^2 \bar{V}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Y}}{dt^2} \\ & \sum_{i=1}^m \{V_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \nu_{ij}(\xi) + W_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \mu_{ij}(\xi)\} - Z_{ij} - m_i \frac{d^2 \bar{W}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Z}}{dt^2} \\ & \sum_{i=1}^m \{X_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0)\} - M_{xi} + L_{xi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \{Y_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \mu_{ij}(\xi) - Z_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \nu_{ij}(\xi)\} - M_{yi} + L_{yi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \{Y_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \nu_{ij}(\xi) + Z_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \mu_{ij}(\xi)\} - M_{zi} + L_{zi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

- $m_i$ ; 節点質量
- $L_{xi}, L_{yi}, L_{zi}$ ;  $x, y, z$  軸まわりの質量モーメント
- $X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}$ ;  $i$  節点にかかる節点力
- $\xi$ ; 節点座標
- $\bar{d}$ ; 節点の振動変位ベクトル
- $d_0$ ;  $P_0$  による変位ベクトル
- $\mu_{ij}, \nu_{ij}$ ;  $y, z$  方向余弦

座屈荷重に近くなると、急激に大きくなる振動が生じた場合を考慮振動付初変位を  $\Delta \bar{d}$  とすると、

$$\left. \begin{aligned} & \sum_{i=1}^m U_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) - X_{ij} + m_i \frac{d^2 \bar{U}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Z}}{dt^2}, \sum_{i=1}^m X_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) - M_{xi} + L_{xi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \{V_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \mu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d}) - W_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \nu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d})\} - Y_{ij} - m_i \frac{d^2 \bar{V}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Y}}{dt^2} \\ & \sum_{i=1}^m \{V_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \nu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d}) + W_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \mu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d})\} - Z_{ij} - m_i \frac{d^2 \bar{W}_i}{dt^2} = m_i \frac{d^2 \bar{Z}}{dt^2} \\ & \sum_{i=1}^m \{Y_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \mu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d}) - Z_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \nu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d})\} - M_{yi} + L_{yi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \\ & \sum_{i=1}^m \{Y_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \nu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d}) + Z_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + \Delta \bar{d}) \mu_{ij}(\xi + \Delta \bar{d})\} - M_{zi} + L_{zi} \frac{d^2 \bar{\theta}_i}{dt^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

式(2)を  $U_{ij}, V_{ij}, W_{ij}, X_{ij}, Y_{ij}, Z_{ij}, \mu_{ij}, \nu_{ij}$  についてテーラー展開し、2次以上の微小項を無視し、整理すると

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial U_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \Delta d_k + m_i \frac{d^2 \bar{U}_i}{dt^2} = 0, \quad \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial X_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \Delta d_k + L_{xi} \frac{d^2 \bar{X}_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial V_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \mu_{ij}(\xi) + V_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} - \frac{\partial W_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \nu_{ij}(\xi) - W_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} \Delta \bar{d}_k - m_i \frac{d^2 \bar{V}_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \nu_{ij}(\xi) + V_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + \frac{\partial W_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \mu_{ij}(\xi) + W_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} \Delta \bar{d}_k - m_i \frac{d^2 \bar{W}_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \mu_{ij}(\xi) + Y_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial d_k} - \frac{\partial Z_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \nu_{ij}(\xi) - Z_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} \Delta \bar{d}_k - m_i \frac{d^2 \bar{Z}_i}{dt^2} = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial X_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \nu_{ij}(\xi) + Y_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial d_k} + \frac{\partial Z_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \mu_{ij}(\xi) - Z_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} \Delta \bar{d}_k - m_i \frac{d^2 \bar{X}_i}{dt^2} = 0 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

ここでは強制振動のみが影響する定常状態について考え、地動変位を正弦波とすれば、振動付加変位もまた地動変位と同じ周期。振動数をもつので、次の式のようにおこなうことができる。

$$\bar{x} = \bar{x} \sin(2\pi f t), \quad \bar{y} = \bar{y} \sin(2\pi f t), \quad \bar{z} = \bar{z} \sin(2\pi f t), \quad \Delta \bar{d}_k = \Delta d_k \sin(2\pi f t) \quad \dots (4)$$

式(3)において各式の第2項の部材力は、地動による部材力と、座屈荷重による部材力にわけることができる。いま単位荷重状態というものを考え、そのときの部材力を  $\bar{U}_{ij}, \bar{V}_{ij}, \bar{W}_{ij}, \bar{X}_{ij}, \bar{Y}_{ij}, \bar{Z}_{ij}$  とすると  $P_E$  による部材力は、

$$U_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{U}_{ij}, \quad V_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{V}_{ij}, \quad W_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{W}_{ij}, \quad X_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{X}_{ij}, \quad Y_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{Y}_{ij}, \quad Z_{ij}(\xi, d_0) = P_E \bar{Z}_{ij} \quad \dots (5)$$

また地動による部材力は、無載荷状態の構造物が地動変位を受けただけの場合の部材力となるので容易に求め得る。

式(3)において  $\Delta d_k$  を新たに  $d_k$  とおき、式(4), (5)を代入すると、

$$\left. \begin{aligned} - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial U_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} d_k + m_i (2\pi f)^2 \bar{U}_i = 0, \quad - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial X_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} d_k + L_{xi} (2\pi f)^2 \bar{X}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial V_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \mu_{ij}(\xi) + V_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + P_E \bar{V}_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} - \frac{\partial W_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \nu_{ij}(\xi) - W_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} - P_E \bar{W}_{ij} \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} d_k + m_i (2\pi f)^2 \bar{V}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial V_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \nu_{ij}(\xi) + V_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + P_E \bar{V}_{ij} \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + \frac{\partial W_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \mu_{ij}(\xi) + W_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} - P_E \bar{W}_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} d_k + m_i (2\pi f)^2 \bar{W}_i = 0 \\ \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \mu_{ij}(\xi) - Y_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial d_k} - P_E \bar{Y}_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial d_k} + \frac{\partial Z_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \nu_{ij}(\xi) + Z_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + P_E \bar{Z}_{ij} \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} d_k + L_{xi} (2\pi f)^2 \bar{Z}_i = 0 \\ - \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^n \left\{ \frac{\partial Y_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \right\} \nu_{ij}(\xi) + Y_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + P_E \bar{Y}_{ij} \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + \frac{\partial Z_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \mu_{ij}(\xi) + Z_{ij}(\xi, d) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} + P_E \bar{Z}_{ij} \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial f_k} \Big|_{d=\bar{d}+\delta d} d_k + L_{xi} (2\pi f)^2 \bar{X}_i = 0 \end{aligned} \right\} \dots (6)$$

これを行列表示すると次の式となる。

$$\{K_1 + K_2 + (2\pi f)^2 W\} d + P_E K_3 d = 0 \quad \dots (7)$$

- 式中  $d$  ... 座屈変形を表すベクトル。  $K_1$  ... 剛性マトリクス  
 $K_2$  ... 強制振動による部材力を含む行列  
 $K_3$  ... 単位荷重状態における部材力を含む行列  
 $W$  ... 質量分布及び質量モーメントを表す行列

式(6)または式(7)より固有値問題として振動時の座屈荷重  $P_E$  を得る。

適用例

充膨アーチおよびブレースドリアーチの計算を行ったが、本稿では、立体ブレースドリアーチの計算結果を示し、他は当日発表する。構造は図-2に示す構造を持ち、各地動振動数について4次までの座屈荷重モードを求め、振動数-座屈荷重の関係は図-3に示す。この結果、地動振動数が増加するに従い、座屈荷重は減少し、固有振動数と等しくなると、座屈荷重は零となる。さらに振動数を増加すると、もはやその次数のモードは現れず、次の次数のモードが直接現れる。式(7)において、固有振動数近傍を除くと  $K_2$  による影響はほとんどなく、 $K_2$  を無視してもよいことがいえるという結果を得た。地動の変位や方向は  $K_3$  のみに関係するので、いいかえれば、振動時の座屈荷重は、振動数に基づいてのみ決定されると考えよう。

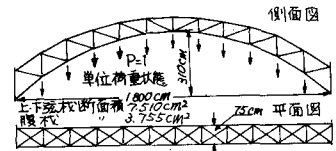


図-2  
 1: 面外対称  
 2: 面内対称  
 3: 面外"  
 4: 面内対称

