

山口大学 正員 會田忠義  
 学生員 佐佐博三

柱(図-1)あるいは骨組構造物(図-2)が周期性外力を受けるとき、その構造物の座屈荷重は周期性外力の影響を受けることは周知の通りである。たとえば、図-1(a)のように水平方向の周期性外力を受ける柱の座屈については、小沢<sup>1)</sup> × Puvier<sup>2)</sup> がすでに明らかにしており、図-2(a)のアーチに対しては Stüssi<sup>3)</sup> が固有振動数と鉛直荷重との関係(この場合、鉛直荷重は質量をもつものとしている)を示し、それに対する模型実験を Kollbrunnar が行なっている。また、図-1および図-2中の(b)図のように周期性外力と非周期性外力との作用方向が同じ場合はパラメトリック起振動として、これまで多くの研究がなされている。本研究は変形法による弾性座屈理論を拡張して周期性外力を受ける骨組構造物の座屈荷重を算出しようとするもので、特に、ここでは図-1および図-2の(b)図のようなパラメトリック起振動の場合の運動方程式と動的不安定領域を決定するための境界振動数方程式を明らかにするとともに、その計算例を示すものである。

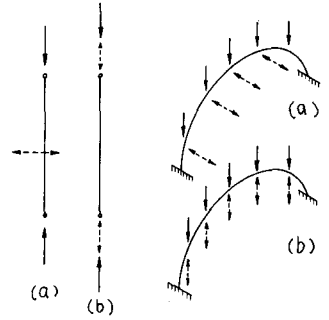


図-1

図-2

周期性外力を受ける構造物の振動変位はその構造物の固有振動に關係する変位と強制力に關係する変位の和で表わされ、強制力を受けた初期ではこれらの二つの変位がともに現われ振動型は複雑となるが、一般に固有振動に關係する変位は減衰のため早期に消滅し、強制力に変位のみが残ることは周知の通りである。本研究では振動変位は強制振動変位のみを考慮し、振動振中が無限大となる不安定な状態を座屈の状態ということにする。また、荷重-変形曲線は図-3の突線のように分岐点Aをもつとは限らず、点線の場合も含まれる。

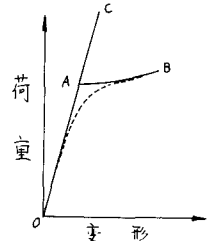


図-3

解析に當って、次の仮定を入れる。

- ① 外力はすべて構造物の節点に作用する。
- ② 周期性外力はすべて一定の周期をもつ。
- ③ 非周期性外力はすべて一定の割合で漸増し座屈荷重に達する。
- ④ 周期性外力と非周期性外力の比が一定である(作用方向が同じである)。
- ⑤ 骨組については骨組構造物一般の仮定が設立する。
- ⑥ 内力はすべて弾性限内にある。
- ⑦ 局部座屈は生じない。
- ⑧ 構造物の質量はすべて節点に集中させる。
- ⑨ 振動における減衰は無視する。
- ⑩ 節点に外力(周期性および非周期性外力)が作用しても質量をもたない。

以下に、節点数  $m$  の正体トラス構造について解析法を示す。

有限変位位置における運動方程式および境界振動数方程式

節点に作用する非周期性外力を  $P_0$ 、周期性外力を  $\bar{P} \sin \omega t$  とする。

$$P_0 = \{X_{01}, \dots, X_{0m}, Y_{01}, \dots, Y_{0m}, Z_{01}, \dots, Z_{0m}\}, \quad \bar{P} = \{\bar{X}_1, \dots, \bar{X}_m, \bar{Y}_1, \dots, \bar{Y}_m, \bar{Z}_1, \dots, \bar{Z}_m\}$$

仮定④より次の関係を満足する単位荷重  $P$  を考えることができる。

$$P = \{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_m\}$$

$$\frac{X_{01}}{X_1} \dots \frac{X_{0m}}{X_m} \frac{Y_{01}}{Y_1} \dots \frac{Y_{0m}}{Y_m} \frac{Z_{01}}{Z_1} \dots \frac{Z_{0m}}{Z_m} = P_0, \quad \frac{\bar{X}_1}{X_1} \dots \frac{\bar{X}_m}{X_m} \frac{\bar{Y}_1}{Y_1} \dots \frac{\bar{Y}_m}{Y_m} \frac{\bar{Z}_1}{Z_1} \dots \frac{\bar{Z}_m}{Z_m} = \bar{P} \quad (1) \quad (2)$$

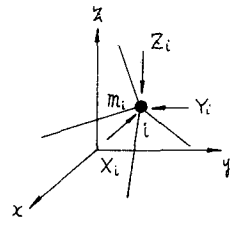


図-4

また、構造物の節点座標を  $\varphi$ 、節点変位を  $d$  で表わす。ただし、節点変位中、 $\bar{P} \sin \omega t$  による微小振動変位を  $\bar{d}$ 、非周期性外力  $P_0$  による変位を  $d_0$  とする。

$$f = \{f_1, \dots, f_n, \dots, f_m\} = \{X_1, \dots, X_m, Y_1, \dots, Y_m, Z_1, \dots, Z_m\}, \quad d = \{d_1, \dots, d_n, \dots, d_m\} = \{u_1, \dots, u_m, v_1, \dots, v_m, w_1, \dots, w_m\}$$

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \lambda_{ij}(\xi) - (X_{0i} + \bar{X}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 \bar{u}_i}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \mu_{ij}(\xi) - (Y_{0i} + \bar{Y}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 \bar{v}_i}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \nu_{ij}(\xi) - (Z_{0i} + \bar{Z}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 \bar{w}_i}{dt^2} = 0$$

節点  $i$  の集中質量を  $m_i$  とすると、微小変位位置における節点  $i$  の運動方程式は式 (3) となる。非周期性外力  $P_0$  が增大するにしたがって、 $P_0$  による付加振動変位  $d\bar{d}$  は無視できなくなり、 $P_0 + \bar{P} \sin \omega t$  による振動変位は  $\bar{d} + d\bar{d}$  となる。

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + d\bar{d}) \lambda_{ij}(\xi + d\bar{d}) - (X_{0i} + \bar{X}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 (\bar{u}_i + d\bar{u}_i)}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + d\bar{d}) \mu_{ij}(\xi + d\bar{d}) - (Y_{0i} + \bar{Y}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 (\bar{v}_i + d\bar{v}_i)}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0 + d\bar{d}) \nu_{ij}(\xi + d\bar{d}) - (Z_{0i} + \bar{Z}_i \sin \omega t) - m_i \frac{d^2 (\bar{w}_i + d\bar{w}_i)}{dt^2} = 0$$

今、振動変位  $\bar{d} + d\bar{d}$  を考慮して有限変位位置における運動方程式を式 (4) で表わす。式 (4) 中の  $N_{ij} \lambda_{ij}, \mu_{ij}$  および  $\nu_{ij}$  を展開して二次以上の微小項を無視し、さらに、式 (3) を用いて整理すると、式 (4) は式 (5) となる。

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial N_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \lambda_{ij}(\xi) + N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \frac{\partial \lambda_{ij}(\xi)}{\partial \xi_k} \right\} d\bar{d}_k - m_i \frac{d^2 d\bar{u}_i}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial N_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \mu_{ij}(\xi) + N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \frac{\partial \mu_{ij}(\xi)}{\partial \xi_k} \right\} d\bar{d}_k - m_i \frac{d^2 d\bar{v}_i}{dt^2} = 0$$

$$\sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^m \left\{ \frac{\partial N_{ij}(\xi, d)}{\partial d_k} \nu_{ij}(\xi) + N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) \frac{\partial \nu_{ij}(\xi)}{\partial \xi_k} \right\} d\bar{d}_k - m_i \frac{d^2 d\bar{w}_i}{dt^2} = 0$$

式 (5) 中の  $N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0)$  は単位荷重  $P$  による部材応力を  $\bar{N}_{ij}$  とするとき式で表わされる。

$$N_{ij}(\xi, \bar{d} + d_0) = (P_0 + \bar{P} \sin \omega t) \bar{N}_{ij} \dots (6)$$

これを式 (5) に入れ  $d\bar{d}_k$  を新たに  $\bar{d}_k$  とし、しる後、式 (5) をトラスの各節点に適用すると、一連の運動方程式は式 (7) のようになる。

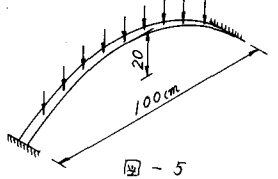
$$W \frac{d^2 \bar{d}^T}{dt^2} - (P_0 + \bar{P} \sin \omega t) K_2 \bar{d}^T - K_1 \bar{d}^T = 0 \dots (7)$$

ここで、 $W$  は質量分布を表わす対角行列で、 $K_1$  は剛性行列、 $K_2$  は単位荷重作用状態における部材応力を含む係数行列である。また、 $\bar{d}^T$  は変位ベクトル  $\bar{d}$  の転置行列である。さらに、

$$C \frac{d^2 \bar{d}^T}{dt^2} - \{ E + (P_0 + \bar{P} \sin \omega t) A \} \bar{d}^T = 0 \dots (8)$$

式 (7) は式 (8) に書き直される。ここで、 $C = K_1^{-1} W$ ,  $A = K_1^{-1} K_2$  で、 $E$  は単位行列である。

式 (8) は Mathieu 方程式である。Mathieu 方程式の解のうちで、周期性外力の周期と同じ周期 ( $2\pi/\omega$ ) および二倍の周期 ( $4\pi/\omega$ ) をもつ二つの解が変位  $\bar{d}^T$  の安定領域と不安定領域 (時間の増加とともに振幅は増加し無限大になる) の境界を示すことは周知の通りである。今、変位ベクトル  $\bar{d}^T$  を外力の周期の二倍の周期



$$\bar{d}^T = A^T \sin \frac{1}{2} \omega t + B^T \cos \frac{1}{2} \omega t \dots (9)$$

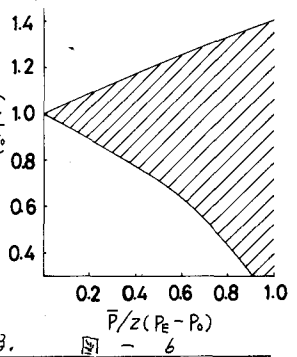
$$| E + (P_0 \pm \frac{1}{2} \bar{P}) A + \frac{1}{2} \omega^2 C | = 0 \dots (10)$$

をもつ式 (9) の周期関数で表わすとき、第一の動的不安定領域 (動的主不安定領域) の境界振動数は式 (10) の境界振動数方程式

式により近似的に求められる。

計算例

図-4 に示す両端固定のアーチ (断面積 =  $0.2 \times 4.0 = 0.8 \text{ cm}^2$ ,  $E = 0.71 \times 10^6 \text{ kg/cm}^2$ ) について動的な不安定領域を求めると図-5 の通りである。図中、 $P_0$  = 静的座圧荷重である。



り小沢久太郎：抗圧材の強制振動，土木学会誌，19巻4号。2) Rumin, H.G.: Die Verminderung der Kniclast eines Stabes durch Querschwingungen. Der Bauingenieur 20 (1939), Heft 13, S. 14. 3) Sciasci, F.: Aktuelle Baustatische Probleme der Konstruktionspraxis, Schweizerische Bauzeitung (1935), S. 132-136