I-66　Tree Methodによる剛節骨組の一安定解析

徳島大学工学部　正会員　児嶋弘行
徳島大学工学部　正会員　平尾 潔
神戸市役所　正会員　○青木克彦

要旨　本研究は，曲げと曲げ捩りとに与える軸方向力の影響を導入した変形法の非線形な基本式を用いて立体剛節骨組を対象とした一自動弾性安定解析を試みたものである。解析法としては，Network解析法にみられるTree Methodを用い，TreeとLinkとに分割された骨組に対して得られるStiffness Matrix $\mathbb{Z}=\mathbb{Y}+\mathbb{V}\cdot\mathbb{X}\cdot\mathbb{W}$ について，$\mathbb{Z}^{-1}$ の計算にはA.S.Householderの計算式を，$|\mathbb{Z}|$ の計算には新たに誘導した計算式 $|\mathbb{Z}|=|\mathbb{Y}|\cdot|\mathbb{X}^{-1}+\mathbb{W}\cdot\mathbb{Y}^{-1}\cdot\mathbb{V}|\cdot|\mathbb{X}|$ を用いて計算の能率化をはかった。

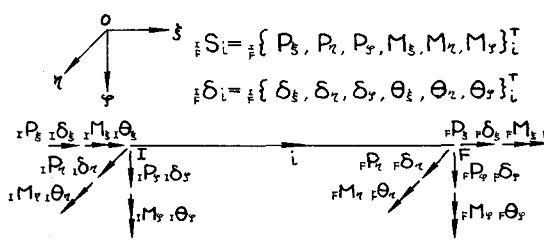
1. Stiffness および Flexibility Matrix　骨組中の任意の一部材 i の個有座標系 $\xi\eta\zeta$ における材端力 $\mathbb{S}_i$ と材端変形量 $\boldsymbol{\delta}_i$ とを図－1のように定めた場合，これらの間の関係は式－(1)のように表わされ，また，始端Iと終端Fとにおける材端力の間の関係，および，式－(1)における ${}_{II}\mathbb{K}_i$ と ${}_{IF}\mathbb{K}_i$ との間の関係は，式－(2)のように表わすことができる。

$${}_{\xi}\mathbb{S}_i={}_{\xi}\{P_\xi, P_\eta, P_\zeta, M_\xi, M_\eta, M_\zeta\}_i^T$$

$${}_{\xi}\boldsymbol{\delta}_i={}_{\xi}\{\delta_\xi, \delta_\eta, \delta_\zeta, \theta_\xi, \theta_\eta, \theta_\zeta\}_i^T$$

$$\left.\begin{aligned} {}_I\mathbb{S}_i &= {}_{II}\mathbb{K}_i\cdot{}_I\boldsymbol{\delta}_i + {}_{IF}\mathbb{K}_i\cdot{}_F\boldsymbol{\delta}_i \\ {}_F\mathbb{S}_i &= {}_{FI}\mathbb{K}_i\cdot{}_I\boldsymbol{\delta}_i + {}_{FF}\mathbb{K}_i\cdot{}_F\boldsymbol{\delta}_i \end{aligned}\right\} \quad \text{—(1)}$$

$${}_F\mathbb{S}_i={}_S\mathbb{T}_i\cdot{}_I\mathbb{S}_i,\quad {}_{FF}\mathbb{K}_i={}_{II}\mathbb{K}_i\cdot{}_K\mathbb{T}_i^T \quad \text{—(2)}$$



図－1

いま，$\mathbb{S}_i={}_I\mathbb{S}_i$，$\mathbb{K}_i={}_{II}\mathbb{K}_i$ と書き直し，さらに，$\Delta_i={}_I\boldsymbol{\delta}_i+{}_K\mathbb{T}_i^T\cdot{}_F\boldsymbol{\delta}_i$ と表わすことにすれば，式－(1)の2個の式は，式－(2)の関係を用いて整理すれば式－(3)のような1個の式で表わされ，式－(4)のような内容をもつ $\mathbb{K}_i$ がStiffness Matrixとなる。

$$\mathbb{S}_i=\mathbb{K}_i\cdot\Delta_i \quad \text{—(3)}$$

$$\mathbb{K}_i=\begin{bmatrix} a & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b_\zeta & 0 & 0 & 0 & c_\zeta \\ 0 & 0 & b_\eta & 0 & -c_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -c_\eta & 0 & e_\eta & 0 \\ 0 & c_\zeta & 0 & 0 & 0 & e_\zeta \end{bmatrix}_i \quad \text{—(4)}$$

式－(3)を Δ_i について解けば，Flexibility Matrixが式－(5)のように求まる。ただし，以上において，

$$\mathbb{F}_i=\begin{bmatrix} a' & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & b'_\zeta & 0 & 0 & 0 & -c'_\zeta \\ 0 & 0 & b'_\eta & 0 & c'_\eta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & d' & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c'_\eta & 0 & e'_\eta & 0 \\ 0 & -c'_\zeta & 0 & 0 & 0 & e'_\zeta \end{bmatrix}_i \quad \text{—(5)}$$

$${}_S\mathbb{T}_i=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ -\Delta\delta_\zeta & 0 & -l & 0 & -1 & 0 \\ \Delta\delta_\eta & l & 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}_i,\qquad {}_K\mathbb{T}_i=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\left(\frac{\varphi_1}{\varphi_7}\right)_\eta l & 0 & \left(\frac{\varphi_6}{\varphi_7}\right)_\eta & 0 \\ 0 & \left(\frac{\varphi_1}{\varphi_7}\right)_\zeta l & 0 & 0 & 0 & \left(\frac{\varphi_6}{\varphi_7}\right)_\zeta \end{bmatrix}_i$$

$$\varphi_{1,\eta,\zeta}=\left\{\frac{\lambda l\,\mathrm{Sin}\,\lambda l}{2(1-\mathrm{Cos}\,\lambda l)}\right\}_{\eta,\zeta(P_\xi>0)}=-\left\{\frac{\lambda l\,\mathrm{Sinh}\,\lambda l}{2(1-\mathrm{Cosh}\,\lambda l)}\right\}_{\eta\cdot\zeta(P_\xi<0)}$$

$$\varphi_{2,\eta,\zeta}=\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{6}\cdot\frac{1-\mathrm{Cos}\,\lambda l}{2(1-\mathrm{Cos}\,\lambda l)-\lambda l\,\mathrm{Sin}\,\lambda l}\right\}_{\eta,\zeta(P_\xi>0)},$$

$$=-\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{6}\cdot\frac{1-\mathrm{Cosh}\,\lambda l}{2(1-\mathrm{Cosh}\,\lambda l)+\lambda l\,\mathrm{Sinh}\,\lambda l}\right\}_{\eta,\zeta(P_\xi<0)},$$

$$\varphi_{3,\eta,\zeta}=\left\{\frac{3\varphi_2+\varphi_1}{4}\right\}_{\eta,\zeta},\quad \varphi_{4,\eta,\zeta}=\left\{\frac{3\varphi_2-\varphi_1}{2}\right\}_{\eta,\zeta},\quad \varphi_{5,\eta,\zeta}=\{\varphi_1\cdot\varphi_2\}_{\eta,\zeta}$$

$$\varphi_{6,\eta,\zeta}=\{2\varphi_1\varphi_4-3\varphi_2\}_{\eta,\zeta},\quad \varphi_{7,\eta,\zeta}=\{4\varphi_1\cdot\varphi_3-3\varphi_2\}_{\eta,\zeta}$$

$$\Delta\delta_\eta={}_I\delta_\eta-{}_F\delta_\eta,\quad \Delta\delta_\zeta={}_I\delta_\zeta-{}_F\delta_\zeta,\quad \lambda^2_{\eta,\zeta}=|P_\xi|/EI_{\eta,\zeta}$$

$$a=\frac{EF}{l},\quad b_{\eta,\zeta}=\left(\frac{12EI}{l^3}\varphi_5\right)_{\eta,\zeta}$$

$$c_{\eta,\zeta}=\left(\frac{6EI}{l^2}\varphi_2\right)_{\eta,\zeta},\quad d=\frac{12EC_w}{l^3}\varphi_\xi$$

$$e_{\eta,\zeta}=\left(\frac{4EI}{l}\varphi_3\right)_{\eta,\zeta}$$

$$a'=\frac{l}{EF},\quad b'_{\eta,\zeta}=\left(\frac{l^3}{3EI}\cdot\frac{\varphi_3}{\varphi_2\varphi_7}\right)_{\eta,\zeta}$$

$$c'_{\eta,\zeta}=\left(\frac{l^2}{2EI}\cdot\frac{1}{\varphi_7}\right)_{\eta,\zeta},\quad d'=\frac{l^3}{12EC_w}\cdot\frac{1}{\varphi_\xi}$$

$$e'_{\eta,\zeta}=\left(\frac{l}{EI}\cdot\frac{\varphi_1}{\varphi_7}\right)_{\eta,\zeta}$$

であり，φ_ξ は，両材端での反りに対する拘束条件と軸方向力の如何に応じてつぎのように使いわける。

a) 両端拘束の場合　$\varphi_\xi=\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\cdot\frac{\sin\lambda l}{2(1-\cos\lambda l)-\lambda l\sin\lambda l}\right\}_{\xi,(GJ<P_\xi r_0^2)}, \quad =-\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\,\frac{\sinh\lambda l}{2(1-\cosh\lambda l)+\lambda l\sinh\lambda l}\right\}_{\xi,(GJ>P_\xi r_0^2)}$

b) 一端拘束他端自由の場合　$\varphi_\xi=\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\cdot\frac{\cos\lambda l}{\sin\lambda l-\lambda l\cos\lambda l}\right\}_{\xi,(GJ<P_\xi r_0^2)}=-\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\cdot\frac{\cosh\lambda l}{\sinh\lambda l-\lambda l\cosh\lambda l}\right\}_{\xi,(GJ>P_\xi r_0^2)}$

c) 両端自由の場合　$\varphi_\xi=-\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\right\}_{\xi,(GJ<P_\xi r_0^2)}=\left\{\frac{\lambda^2 l^2}{12}\right\}_{\xi\,(GJ>P_\xi r_0^2)}$，　$\lambda_\xi^2=|P_\xi r_0^2-GJ|/EC_w$

2. 非線形 Modified Incidence Matrix　一般座標系 xyz における節点Jの変位と，節点に作用する外力とを，$\mathbb{U}_J=\{U_x\ U_y\ U_z\ \Theta_x\ \Theta_y\ \Theta_z\}^T$，　$\mathbb{P}_J=\{P_x\ P_y\ P_z\ M_x\ M_y\ M_z\}^T$ とし，骨組の全節点の変位，全部材の材端変形量，材端力，および，節点に作用する荷重系を表わす列ベクトルを，それぞれ，$\mathbb{U}$，Δ，$\mathbb{S}$，および，$\mathbb{P}$ で表わせば，これらの間の関係は xyz 系と $\xi\eta\zeta$ 系との関係を表わす通常の座標変換行列 $\mathbb{R}_i$ と，式-(2)における $_S\mathbb{T}_i$ と $_K\mathbb{T}_i$ とを要素にもつ非線形な Modified Incidence Matrix $_S\mathbb{Q}$，$_K\mathbb{Q}$ を用いて，式-(6)のように表わせる。ここに，$_S\mathbb{Q}$，$_K\mathbb{Q}$ は部材と節点との連結関係より右のような内容をもっている。

$$\mathbb{P}={}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{S}\ ,\quad \Delta={}_K\mathbb{Q}\cdot\mathbb{U}\qquad -(6)$$

$${}_S\mathbb{Q}_{iJ}=\begin{cases}\mathbb{R}_i^T & \text{部材 } i \text{ が節点 J に正連結}\\ \mathbb{R}_i\cdot{}_S\mathbb{T}_i & 〃\quad〃\quad \text{負連結}\\ \mathbb{O} & 〃\quad〃\quad \text{非連結}\end{cases}$$

$${}_K\mathbb{Q}_{iJ}=\begin{cases}\mathbb{R}_i & \text{部材 } i \text{ が節点 J に正連結}\\ {}_K\mathbb{T}_i^T\cdot\mathbb{R}_i & 〃\quad〃\quad \text{負連結}\\ \mathbb{O} & 〃\quad〃\quad \text{非連結}\end{cases}$$

3. Tree Method による解法　いま，骨組全体に対する Stiffness Matrix を $\mathbb{K}$ で表わし，式-(6)の関係を考慮すると，式-(3)は

$$({}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{K}\cdot{}_K\mathbb{Q})\mathbb{U}=\mathbb{P}\qquad -(7)$$

と書くことができ，これの左辺の係数を Tree (T)，と Link (L) との部分に分割して書けば，

$${}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{K}\cdot{}_K\mathbb{Q}={}_S\mathbb{Q}_T\cdot\mathbb{K}_T\cdot{}_K\mathbb{Q}_T+{}_S\mathbb{Q}_L\cdot\mathbb{K}_L\cdot{}_K\mathbb{Q}_L$$

となり，これの逆行列の計算は，A.S.Householder の式を用いることにより式-(8)のように，また，行列式の値は式-(9)のようにして計算することができる。

$$({}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{K}\cdot{}_K\mathbb{Q})^{-1}=\mathbb{G}-\mathbb{G}\cdot{}_S\mathbb{Q}_L({}_K\mathbb{Q}_L\mathbb{G}\cdot{}_S\mathbb{Q}_L+\mathbb{F}_L)^{-1}{}_K\mathbb{Q}_L\cdot\mathbb{G}\qquad -(8)$$

$$|{}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{K}\cdot{}_K\mathbb{Q}|=|\mathbb{G}^{-1}|\,|{}_K\mathbb{Q}_L\cdot\mathbb{G}\cdot{}_S\mathbb{Q}_L+\mathbb{F}_L|\,|\mathbb{K}_L|\qquad -(9)$$

ここに，$\mathbb{G}=({}_S\mathbb{Q}_T\cdot\mathbb{K}_T\cdot{}_K\mathbb{Q}_T)^{-1}={}_K\mathbb{Q}_T^{-1}\cdot\mathbb{F}_T\cdot{}_S\mathbb{Q}_T^{-1}$

4. 座屈荷重の決定法とプログラミング　座屈荷重の決定は，荷重強度を適当に変化させて $|{}_S\mathbb{Q}\cdot\mathbb{K}\cdot{}_K\mathbb{Q}|\doteqdot 0$ となる荷重強度を見出す方法によったが，その際，最初の3～4回を任意に変化させた後は Lagrange の補間法を用いてこれを推定するようにした。また，一般にこのような非線形解析では多くの繰返し計算を必要とするため，著者らは京都大学大型計算機 FACOM 230-60 を対象にして自動解析プログラムを作成したが，計算機の行なう演算の流れの概略は，図-2に示すフローチャートのようである。

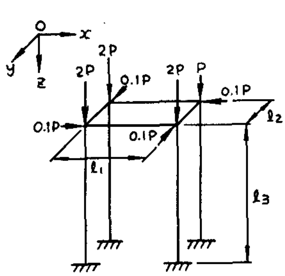


図-3

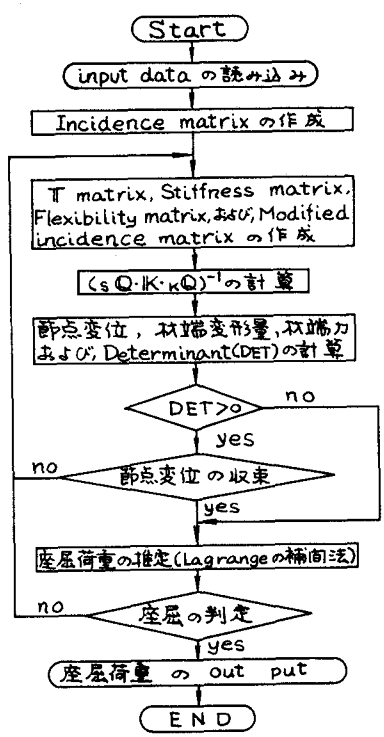


図-2

5. 計算例　図-3に示すような簡単な立体ラーメンの柱を Tree に，はりを Link に選らんで，各部材の材端における反りに対する拘束条件を変化させた場合について数値計算を行なった。紙面の都合上結果については省略し，講演会当日に報告する。