I-60　残留応力、及び異なる剛比をもつリブ付単純支持板の座屈について

大阪大学工学部　正　前田幸雄
大阪府立工専　正　○日笠隆司

1. まえがき

１９６９年以来、ボックスガーダー橋の事故が各国で起り、その結果、圧縮フランジの縦リブについても、ウェブと同じように、最小剛比γ^*の数倍を設計に使用すべきであることをMassonnet, Dubasが指摘している。前者はSkaloudの補剛板の幾何学的非線形問題の解析結果より、後者はボックスガーダーの実験結果によったものである。このため、特に補剛板の残留応力、初期撓みを考慮した補剛板の座屈、及び座屈後の耐荷力が重要な問題となっている。本文はリブ付単純支持板の座屈を取り扱ったものである。解法としては、エネルギー法、差分法、有限要素法が考えられるが、残留応力、塑性の両者をとり入れた研究[1]は非常に少ない。本文はリブ付板をフーリエ級数による級数展開法で解き、さらに残留応力をもつ弾塑性座屈、塑性座屈についても計算出来ることを論じたものである。なお、塑性座屈についてはStowellの塑性変形理論[2]を用いる。

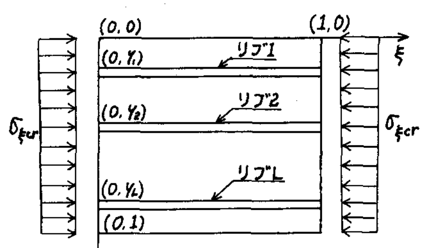
2. 計算式の誘導

2−1. 弾性座屈、厚さt，巾b，長さa，ξ方向に縦リブを有する四辺単純支持のリブ付矩形板を対象とする。座標は図−1に示すように各々、座標軸をa，bで割った無次元の座標をとり、L個の縦リブのη座標を$\eta_1=b_1/b$，$\eta_2=b_2/b$，…$\eta_L=b_L/b$とする。仮定、及びモデル化は次の通りである。

(1) 四辺を単純支持し、縦リブ方向にのみ均一な圧縮力が作用する。

(2) 少数のリブ、及び不等間隔に配置された補剛板についても適用出来るように、縦リブを板から分離し、一枚の板(2軸)とL個のリブ(1軸)とし、解析する。

(3) 縦リブと板の境界において、リブの曲げ変形による板厚方向力と、リブの捩り変形によるモーメントが板の中央に作用すると仮定し、これらの力は$\eta=\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_L$において、巾$t_1/b$，$t_2/b$，…$t_L/b$なる矩形のパルス関数で表現され、この関数をフーリエsin級数によって展開する。($t_1, t_2, \cdots t_L$ = リブの厚さ)



図−1

(4) リブの軸力についても、フーリエ級数展開によるパルスで表わす。

(5) 残留応力の分布状態、及びその大きさは関数、或いは数値によって示され、フーリエ級数にて表わす。

(6) 偏心リブについては、等価的な曲げ剛性、及び捩り剛性によって表わされるものとする。

図−1のような補剛板について、板厚方向の平衡方程式をたて、無次元化すると、次のように示される。

$$\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4}=12(1-\nu^2)(\sigma_{\xi cr}+\sigma_{\xi R})\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+12(1-\nu^2)\sigma_{\xi cr}\sum_{n=1}^{L}\left[\frac{b}{t}\delta_n\right]\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}_{\eta=\eta_n}$$
$$-\frac{1}{\beta^2}\sum_{n=1}^{L}\left[\frac{b}{t_n}\gamma_n\right]\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}_{\eta=\eta_n}-\sum_{n=1}^{L}\left[\frac{b}{t_n}\gamma_{Gn}\right]\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2}_{\eta=\eta_n} \qquad \text{——(1)}$$

但し、[ ]は$\eta=\eta_1, \eta_2, \cdots \eta_L$において、$t_1/b$，$t_2/b$，…$t_L/b$なる巾をもつ矩形パルス関数を表わすものとする。$\xi=x/a$，$\eta=y/b$，$w$=撓み$/t$，$\sigma_{\xi cr}=\sigma_{xcr}\cdot b^2/Et^2$，$\sigma_{\xi R}=\sigma_{xR}\cdot b^2/Et^2$，$\delta_n=A_n/bt$
$\gamma_n=EI_n/Db$，$\gamma_{Gn}=GJ_n/Db$，A_n=リブの面積，EI_n=リブの曲げ剛性，GJ_n=リブの捩り剛性
$D=Et^3/12(1-\nu^2)$，$\beta=a/b$，σ_{xcr}=座屈応力(引張を正とする)，σ_{xR}=残留応力(引張を正)

無次元化撓み関数 $w=\sum_{n=1}^{N}a_{mn}\sin m\pi\xi\sin n\pi\eta$ と仮定し、無次元化残留応力関数 $\sigma_{xR}/\sigma_Y=R_0+\sum_{n=1}^{N}R_n\cos n\pi\eta$ として表わし、(1)式に代入する。さらに、矩形パルス関数をフーリエSin展開し，ξ，ηに関して

(1)式が常に成り立つ条件を求めると

$$\frac{\pi^2}{12(1-\nu^2)}\frac{(m^2+n^2\beta^2)^2}{m^2\beta^2}a_{mn}+\frac{\pi^2}{6(1-\nu^2)}\sum_{p=1}^{N}\sum_{q=1}^{L}\left(\frac{m^2\gamma_q}{\beta^2}+n^2\gamma_{Gq}\right)\sin n\pi\eta_q\sin p\pi\eta_q a_{mp}$$
$$+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}R_{n-k}a_{mk}+\sum_{k=1}^{n-1}R_k a_{mn-k}-\sum_{k=1}^{N-n}R_{n+k}a_{mk}+\sum_{k=1}^{N-n}R_k a_{mk+n}+2R_0 a_{mn}\right)$$
$$=-\sigma_{\xi cr}\left(a_{mn}+2\sum_{p=1}^{n}\sum_{q=1}^{L}\delta_q\sin n\pi\eta_q\sin p\pi\eta_q a_{mp}\right) \quad \text{———}(2)$$

（但し、リブの厚さは無視しσ_Y, ε_Yは引張降伏応力、及び歪を示す。）

となり、撓み関数の係数に関する特性方程式が導びかれる。$\sigma_{\xi cr}$については

$$\sigma_{xcr}=\frac{E}{(b/t)^2}\sigma_{\xi cr}=k\frac{E\pi^2}{12(1-\nu^2)(b/t)^2},\qquad \frac{\sigma_{xcr}}{\sigma_Y}=\left(\frac{\varepsilon_{xcr}}{\varepsilon_Y}\right)_e=\frac{\sigma_\xi}{(b/t\cdot\sqrt{\sigma_Y/E})^2} \quad \text{—}(3)$$

と表わされる。なお、$(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_e$は弾性歪比である。特性方程式(2)を解くことによって、固有値$\sigma_{\xi cr}$を計算し(3)式より座屈応力σ_{xcr},座屈応力比σ_{xcr}/σ_Y,座屈係数kを求めることが出来る。

2－2．弾塑性座屈．塑性座屈　　塑性域における理論は種々問題のあるところであるが、塑性座屈を固有値問題としてとらえると、塑性変形理論が良く適応できることが知られている。本文では、この理論に属し、ポアソン比$\nu=0.5$とするStowellの理論を採用している。基礎的な仮定としては、(1)応力と歪との関係は完全弾塑性体である。(2)座屈の瞬間には、板のいたるところで、歪の逆転は生じないとする。

残留応力がある場合には、secant modulus E_sはη方向に関して変化するので、板が面外にわずかに変形したときの撓みによる板厚方向の分力はStowellの理論を基礎として、次のように導びくことができる。

$$\frac{12(1-\nu^2)}{q}\left\{E_{s(\eta)}\left(\frac{1}{4\beta^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4}\right)+\frac{\partial E_{s(\eta)}}{\partial\eta}\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\eta}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 E_{s(\eta)}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\xi^2}+\beta^2\frac{\partial^2 E_{s(\eta)}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}\right\} \quad \text{——}(4)$$

なお、(4)式は完全弾塑性体であるのでtangent modulus $E_s=0$とし、又、(2)式と同様な無次元で表わしている。(4)式中、$E_{s(\eta)}=E_s/E$である。$|\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y+\varepsilon_{xR}/\varepsilon_Y|\leqq 1$のときは弾性であり、$|\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y+\varepsilon_{xR}/\varepsilon_Y|\geqq 1$のときは塑性である。(4)式は塑性域のみについて考えているので、$0\leqq\eta\leqq 1$の範囲の内、弾性の部分では、$E_{s(\eta)}=0$ 塑性の部分では、$E_{s(\eta)}=1/|\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y+\varepsilon_{xR}/\varepsilon_Y|$となる。なお$\varepsilon_{xR}$は残留応力$\sigma_{xR}$に対応する弾性残留歪である。$\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y$が定まれば$E_{s(\eta)}=E_0+\sum_{n=1}^{N}E_n\cos n\pi\eta$なるフーリェcos級数に展開できる。

弾性範囲内の板の撓み変形による板厚方向の分力は(1)式の左辺より、塑性域の部分を除くことによって、

$$\left\{\frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^4}+2\frac{\partial^4 w}{\partial\xi^2\partial\eta^2}+\beta^2\frac{\partial^4 w}{\partial\eta^4}\right\}(1-\varphi_{(\eta)})-2(1-\nu)\frac{\partial\varphi_{(\eta)}}{\partial\eta}\frac{\partial^3 w}{\partial\xi^2\partial\eta}-\nu\frac{\partial^2\varphi_{(\eta)}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2}-\beta^2\frac{\partial^2\varphi_{(\eta)}}{\partial\eta^2}\frac{\partial^2 w}{\partial\eta^2} \quad \text{——}(5)$$

で表わすことが出来る。なお，$\varphi_{(\eta)}$は弾性、塑性によって定まる関数である。$0\leqq\eta\leqq 1$の範囲の中で、弾性の部分では、$\varphi_{(\eta)}=0$，塑性の部分では、$\varphi_{(\eta)}=1$である。$\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y$より，$\varphi_{(\eta)}=\varphi_0+\sum_{n=1}^{N}\varphi_n\cos n\pi\eta$なるフーリェcos級数に展開できる。弾塑性、及び塑性域の板の微小撓み変形による板厚方向の分力は(2)式の第1項のかわりに(4)式と(5)式の和をとれば良い。(2)式の第2項の曲げ剛比γ_nに塑性の影響を考慮するには、リブは1軸応力状態であるので、柱の弾塑性座屈のtangent modulus理論によればよい。残留応力によって断面内の応力状態は一様ではないことを考慮して本文では$\tau=[(\int E_t(\varepsilon_{xcr},\zeta)\zeta^2 dA_n)/Db]/\gamma_n$とする[3]。$\gamma_{Gn}$に関しては種々問題のあるところであるが、開断面リブの場合は座屈値に与える影響は非常に小さいのでγ_{Gn}とする。図－2は弾塑性域における歪ε_xを降伏引張歪ε_Yで割って、その比の分布状態を示したものである。図－2－(a)は座屈歪比$\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y=1.25$のときの歪比の分布状態である。このときの残留歪比は(b)に示す。(a)の斜線部は塑性歪比$\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y$である。(b)は(a)の歪比を分解して、$\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y$, $\varepsilon_{xR}/\varepsilon_Y$, $-\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y$として表わしている。(b)より弾性歪比$(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_e$は(c)のように表わされる。$-\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y$, ε_{xcr}, ε_{xR}によって，$-\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y=P_0+\sum_{k=1}^{N}\cos n\pi\eta$なるフーリェcos級

数に展開出来る。(2)式の右辺は、$\sigma_{\xi cr}=(b/t\times\sqrt{\sigma_Y/E})^2(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_e$ であるので、$(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_e$ の項の中の $-\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y$ による板厚方向の分力は次の式で示される。

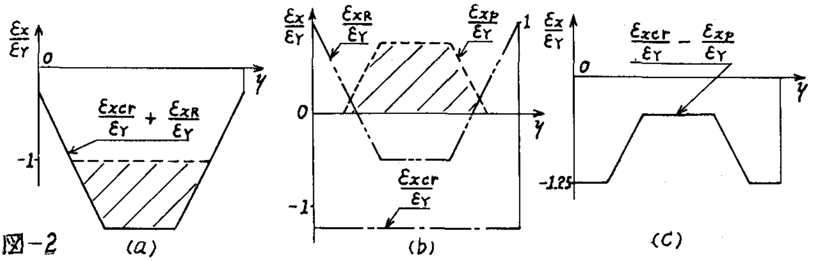


図-2

$$\frac{1}{2}\left(\frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}\right)^2\left(\sum_{k=1}^{n-1}P_{n-k}a_{mk}+\sum_{k=1}^{n-1}P_k a_{m\,n-k}-\sum_{k=1}^{N-n}P_{n+k}a_{mk}+\sum_{k=1}^{N-n}P_k a_{m\,k+n}+2P_0 a_{mn}\right) \qquad (6)$$

(3), (4), (5), (6)式より弾塑性, 及び塑性座屈に関する特性方程式は下記のように導びかれる。

$$\frac{\pi^2}{2m^2\beta^2}\Bigg[\Bigg[\left\{\frac{(m^2+n^2\beta^2)^2}{6(1-\nu^2)}(1-\varphi_0)+2E_0\left((m^2+n^2\beta^2)^2-\frac{3m^4}{4}\right)\right\}a_{mn}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{9}\left((m^2+k^2\beta^2)^2-\frac{3m^4}{4}+\beta^2k\left[m^2(n+\frac{k}{2})\right.\right.\right.$$

$$\left.\left.+\beta^2(n-k)^2k\right]\right)E_{n-k}-\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left((m^2+k^2\beta^2)^2+k\left[2\beta^2(1-\nu)m^2(n-k)+\nu\beta^2m^2k+(n-k)^2k\right]\right)\varphi_{n-k}\Big\}a_{mk}$$

$$+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{1}{9}\left((m^2+(n-k)^2\beta^2)^2-\frac{3m^4}{4}+\beta^2(n-k)\left[\frac{m^2}{2}(n+k)+\beta^2k^2(n-k)\right]\right)E_k-\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left((m^2+(n-k)^2\beta^2)^2\right.\right.$$

$$\left.\left.+(n-k)\left[2\beta^2(1-\nu)m^2k+\nu\beta^2m^2(n-k)+k^2(n-k)\right]\right)\varphi_k\right\}a_{m\,n-k}+\sum_{k=1}^{N-1}\left\{-\frac{1}{9}\left((m^2+k^2\beta^2)^2-\frac{3m^4}{4}\right.\right.$$

$$\left.+\beta^2k\left[m^2(n+\frac{3k}{2})+\beta^2(n+k)^2k\right]\right)E_{n+k}+\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left((m^2+k^2\beta^2)^2+k\left[2\beta^2(1-\nu)m^2(n+k)+\nu\beta^2m^2k\right.\right.$$

$$\left.\left.\left.+(n+k)^2k\right]\right)\varphi_{n+k}\right\}a_{mk}+\sum_{k=1}^{N-n}\left\{\frac{1}{9}\left((m^2+(n+k)^2\beta^2)^2-\frac{3m^4}{4}+\beta^2(n+k)\left[\frac{m^2}{2}(n+3k)+\beta^2k^2(n+k)\right]\right)E_k\right.$$

$$\left.-\frac{1}{12(1-\nu^2)}\left((m^2+(n+k)^2\beta^2)^2+(n+k)\left[2\beta^2(1-\nu)m^2k+\nu\beta^2m^2(n+k)+k^2(n+k)\right]\right)\varphi_k\right\}a_{m\,n+k}\Bigg]\Bigg]$$

$$+\frac{\pi^2}{6(1-\nu^2)}\sum_{p=1}^{N}\sum_{g=1}^{L}\left(\frac{m^2\gamma_g}{\beta^2}+n^2\gamma_{Gg}\right)\tau\cdot\sin n\pi\eta_g\sin p\pi\eta_g\,a_{mp}+\frac{1}{2}\left(\frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}\right)^2\left[\sum_{k=1}^{n-1}(R_{n-k}+P_{n-k})a_{mk}\right.$$

$$\left.+\sum_{k=1}^{n-1}(R_k+P_k)a_{m\,n-k}-\sum_{k=1}^{N-n}(R_{n+k}+P_{n+k})a_{mk}+\sum_{k=1}^{N-n}(R_k+P_k)a_{m\,k+n}+2(R_0+P_0)a_{mn}\right]$$

$$=-\frac{\varepsilon_{cr}}{\varepsilon_Y}\left(\frac{b}{t}\sqrt{\frac{\sigma_Y}{E}}\right)^2\left(a_{mn}+2\sum_{p=1}^{n}\sum_{g=1}^{L}\delta_g\sin n\pi\eta_g\cdot\sin p\pi\eta_g\,a_{mp}\right) \qquad (7)$$

なお、図-2-(c)より平均弾性座屈歪比 $(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_{e.mean}=(1/1+\sum_{n=1}^{L}\delta_n)\left[\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y-\int_0^1(\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y)d\eta+\sum_{n=1}^{L}(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y-\varepsilon_{xp}/\varepsilon_Y)_{\eta=\eta_n}\cdot\delta_n\right]$ である。(7)式の固有値をとき、(3)式において、$(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_e=(\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y)_{e.mean}$ とおくことによって座屈応力、座屈係数が求まる。(7)式の計算手順は、$\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y$ を定めれば一度の計算で固有値は求まる。弾塑性域における $\varepsilon_{xcr}/\varepsilon_Y$ を直接求めるときは、繰返し演算による。

3 結び

フーリエ級数による級数展開法によって補剛板の残留応力をもつ弾塑性、塑性座屈の式を誘導した。

参考文献

1) 奥村敏恵, 西野文雄他"差分法によるリブ付板の弾塑性座屈"土木学会年次学術講演概要集, S.47.
2) Stowell, E.Z "A Unified Theory of Plastic Buckling of Columns and Plates" NACA, Tech. Note, No.1156. (1948)
3) JSSC "残留応力と座屈" No.16, Vol.3, 1967.