

東北工学部 正員 佐武正雄  
東北工学部 正員 ○新関 茂

## 1. まえがき

連続体の有限要素解析において、要素間の力学的諸量の伝達は、全て節点を通じて行なわれるものと考えられる。したがって、要素集合体のトポロジ-的性質は、グラフ理論を用いて表現することも可能である<sup>1)</sup>。有限要素法による二次元問題の応力解析において M. J. Turner 等は、変位関数の導関数を用いて導かれる応力マトリックスを用いずに要素間で伝達される節点力(集中力)をその作用面積で単純に平均化することによって<sup>2)</sup> 応力(分布力)を求めた。このような集中力と分布力の置換を更に合理的に行うために、本文では、仕事量に<sup>3)</sup> 関して集中力と分布力との置換を等価に行うことのできるウェイト・マトリックスを導びき、板の応力解析を例とし、このウェイト・マトリックスによる方法と他の方法との比較を行ったものである。また近年、J. T. Oden によって提案された conjugate projection の理論<sup>3)</sup>を用い、ウェイト・マトリックスの数学的意味について考察する。

## 2. ウェイト・マトリックスの誘導とその応用例

初めに仕事量に<sup>3)</sup> 関して 集中力と分布力との置換を等価に行うウェイト・マトリックスを導びく方法について述べる。有限要素法において、各節点の変形量  $u^\alpha$  と補向関数  $\varphi_\alpha$  ( $\alpha = 1, 2, \dots, G$ ) を用い、領域  $R[0, l]$  上の変位関数  $u$  が (2.1) 式 ( $\alpha$  について和をとる。以下同様) で表されるものとする。このとき  $R$  上の分布力  $p(x)$  と仕事量に<sup>3)</sup> 関して等価な各節点の集中力  $p^\alpha$  は、仮想仕事の原理により (2.2) 式で与えられる。分布力  $p(x)$  が、変位と同様に、各節点での値  $p^\alpha$  (一般には、微分係数も含む) を用い、近似的に (2.3) 式で表わされるものとする。(2.3) 式を (2.2) 式に代入し (2.4)(2.5) 両式が求められる。(2.5) 式は、マトリックス  $W_{\alpha\beta}$  が、分布力  $p^\beta$  を仕事量に<sup>3)</sup> 関して等価な集中力  $p^\alpha$  に置換するウェイト・マトリックスであることを表わしている。またマトリックス  $W_{\alpha\beta}$  が、正則ならば、逆に集中力  $p^\alpha$  から分布力  $p^\beta$  への等価置換を (2.6) 式によって行うことができる。今、補向関数  $\varphi_\alpha$  が、Heaviside の階段関数  $H(x)$  を用い (2.7) 式で表わされるものとする。ただし、 $N$  は、分割数、 $Nh = l$ 、 $\xi = x/h$  であり、 $\varphi_\alpha(\xi)$  は、(2.7) 式で定義された領域外では、恒等的にゼロであるものとする。 $N=4$  のときの  $W^{\alpha\beta}$  を示せば、(2.8) 式となる。次に有限要素法による板の応力解析へのウ

$$u(x) = u^\alpha \varphi_\alpha(x) \quad (2.1)$$

$$p^\alpha = \int_R \varphi_\alpha(x) p(x) dx \quad (2.2)$$

$$p(x) = p^\alpha \varphi_\alpha(x) \quad (2.3)$$

$$p^\alpha = W_{\alpha\beta} p^\beta \quad (2.4)$$

$$W_{\alpha\beta} = \int_R \varphi_\alpha \varphi_\beta dx \quad (2.5)$$

$$p^\alpha = W^{\alpha\beta} p_\beta \quad (2.6)$$

$$\varphi_1(\xi) = 1 - \xi \quad (0 \leq \xi \leq 1)$$

$$\varphi_\alpha(\xi) = \xi + 2 - \alpha + 2(\alpha - 1 - \xi)H(\xi - \alpha + 1) \quad (\alpha - 2 \leq \xi \leq \alpha)$$

$$\varphi_{N+1}(\xi) = -N + 1 + \xi \quad (N - 1 \leq \xi \leq N) \quad (2.7)$$

$$(W^{\alpha\beta}) = \frac{1}{28h} \begin{pmatrix} 97 & & & & \\ -26 & 52 & & & \text{Sym.} \\ 7 & -14 & 49 & & \\ -2 & 4 & -14 & 52 & \\ 1 & -2 & 7 & -26 & 97 \end{pmatrix} \quad (2.8)$$

イト・マトリックスの応用について説明する。図-2.1は、固定板 ( $a \times a$ ) の  $1/4$  を示したものである。固定板が、等分布荷重  $p$  を受けるとき、節点 (1, 2, ..., 5) における、 $y$  軸方向の集中モーメント(節点力)は、変形量と stiffness matrix の性質を用いて容易に求めることができる。表-2.1は、各節点の集中モーメントとウェイト・マトリックス ((2.8) 式) によって等価に置換された  $y$  軸方向の分布モーメント及び  $u$ 、その他の方法によ

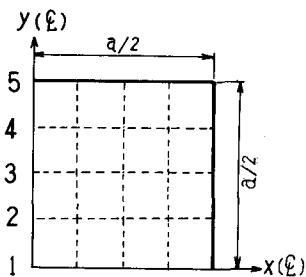


図-2.1

節点番号		1	2	3	4	5
集中モーメント ( $\times pa^3$ )		-0.006244	-0.001232	0.001241	0.002476	0.002789
分布 モーメント ( $\times pa^2$ )	i ウェイト・マトリックス	-0.05241	-0.01027	0.01110	0.02060	0.02322
	ii 作用面積による平均	-0.04995	-0.00986	0.01073	0.01981	0.02231
	iii 応力マトリックス	-0.05028	-0.00888	0.01211	0.02144	0.02405
	iv conjugate projection	-0.05012	-0.00858	0.01221	0.02148	0.02403
	v S. Timoshenko	-0.0513	—	—	—	0.0231

表-2.1

て求めた分布モーメント値を比較したものである。表-2.1の iii)の上,下の値は、図-2.1の節点の上側及び下側の要素から求めた分布モーメント値をそれぞれ表わしている。計算例では、非適合な有限要素モデルを用いた。

### 3. Conjugate Projectionの理論によるウェイト・マトリックスに関する考察

conjugate projectionの理論を用いてウェイト・マトリックスの数学的意味について考察する。領域 $R[0, \ell]$ で定義された無限次元の関数空間(Hilbert空間)  $H$ の部分空間 $U \subset H$ の一次独立な基底を $\varphi_\alpha(x)$  ( $\alpha=1, 2, \dots, G$ )とする。領域 $R$ の分割点 $s^\beta$ では、 $\varphi_\alpha$ は、(3.1)式を満たすものとする。部分空間 $U$ のGram行列(共変計量テンソル)は(3.2)式で定義される。 $H$ の共役空間 $H^*$ の部分空間 $U^* \subset H^*$ の基底 $\varphi^\alpha(x)$ は、 $C_{\alpha\beta}$ の逆行列 $C^{\alpha\beta}$ を用い(3.3)式によって導かれる。2つの基底 $\varphi_\alpha$ と $\varphi^\beta$ には、(3.4)式に示される関係が、成り立ち、これらは、双対基と呼ばれる。部分空間 $U$ の任意の元 $p(x) \in U$ は、conjugate projectionを用い(3.5)式で表わ

$$\varphi_\alpha(x^\beta) = \delta_\alpha^\beta \quad (3.1)$$

$$C_{\alpha\beta} = \int_R \varphi_\alpha \varphi_\beta dx \triangleq \langle \varphi_\alpha, \varphi_\beta \rangle \quad (3.2)$$

$$\varphi^\alpha(x) = C^{\alpha\beta} \varphi_\beta(x) \quad (3.3)$$

$$\langle \varphi_\alpha, \varphi^\beta \rangle = \delta_\alpha^\beta \quad (3.4)$$

$$p = p^\alpha \varphi_\alpha = p_\alpha \varphi^\alpha \quad (3.5)$$

$$p^\alpha = \langle p, \varphi^\alpha \rangle, \quad p_\alpha = \langle \varphi_\alpha, p \rangle \quad (3.6)$$

$$p^\alpha = C^{\alpha\beta} p_\beta \quad (3.7)$$

される。ただし係数 $p^\alpha, p_\alpha$ は、(3.6)式で表わされるものとする。特に今の場合、(3.1)式により $p^\alpha$ は関数 $p(x)$ の分割点での値 $p(x^\alpha)$ となっている。(3.3),(3.6)両式より、 $p^\alpha$ と $p_\beta$ には、(3.7)式の関係がある。前節の変位の補間関数 $\varphi_\alpha$ を、 $U$ の基底 $\varphi_\alpha$ に選べば、(2.5),(3.2)両式より $W_{\alpha\beta} = C_{\alpha\beta}$ となるから、関数 $p(x)$ を、部分空間 $U^*$ にconjugate projectionしたときの成分 $p^\alpha$ は、(3.7)式と(2.6)式を比較し、分布力 $p^\alpha$ と仕事量に関して等価な集中力を表わしているものと考えられる。また、これは、Diracのデルタ関数 $\delta(x)$ の $U^*$ 上へのconjugate projectionが、 $\varphi^\alpha(x)$ となることにも対応しているものと思われる。

### 4. あとがき

通常の応力マトリックスだけを用いる解析では、一般に、一つの節点における応力値が、その節点の属する要素ごとに異なった値となるが、ウェイト・マトリックスによる方法では、一つの節点ごとに応力値が一意的に定まる。表-2.1に示した計算例では、ウェイト・マトリックスによる方法は、他の方法と比較して良い結果となっているように思われる。

### 参考文献

- 1) 佐武正雄, 新関 茂: 有限要素法に対するトポロジック的手法の応用, 土木学会第27回年次学術講演会講演概要集, 1, pp.29-32, 1972
- 2) Turner, M.J., Martin, H.C. and Weikel, B.C.: Further Developments and Applications of the Stiffness Method, in B.M. Fraeys de Veubeke (ed.), "Matrix Methods in Structural Analysis", AGARDograph, 72, pp.203-266, Pergamon Press, 1964
- 3) Oden, J.T.: Finite Elements of Nonlinear Continua, MacGraw-Hill, 1972
- 4) Timoshenko, S.: Theory of Plates and Shells, MacGraw-Hill, 1959
- 5) Taylor, A.E.: Introduction to Functional Analysis, Wiley, 1958