I-46　　有限要素法による構造物に作用する流体力の解析

秋田大学　正　○薄木征三
秋田大学　学　　今野隆一

1.　まえがき

土木構造物の耐風応答の問題は，長大つり橋，斜張橋をはじめ，構造物の大型化にともない設計上大きな要素となっている。風による，これらの構造物の振動応答を定量的に評価することは，極めて困難な問題であるが，従来のこの方面の研究は大別すると2つの主要な方向に分類されよう。すなわち1つは部分模型による風洞実験であり，他の1つは構造物と流体の相互干渉現象をアナロジーに基づく数学モデル（非線形振動子）に置きかえて説明せんとするもの，あるいは流体を完全流体と見なし，自由流線理論や流体モデルを仮想することで説明せんとするものである（以上はいわゆる風琴振動の観点からの分類である）。しかしながら後者の理論的研究は，アナロジーや流体力学的仮説に基づく便宜的な説明であり，本質的な現象解明には寄与するものではない。

本報告は，非圧縮粘性流れの中に置かれた構造物の振動応答を，有限要素法を用いて数値実験の立場から現象の解明にアプローチしようとするものである。その定式過程について以下報告する。

2. 基礎方程式

非圧縮，粘性流体の基礎方程式は

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (1)$$

$$\rho\frac{\partial u_i}{\partial t} + \rho u_j\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial p}{\partial x_i} - \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (2)$$

ここに u_i = 流速，ρ = 密度，p = 圧力，τ_{ij} = 粘性応力 であり簡単のため物体力はないとする。また記述を簡単にするため以下2次元問題を対象とする。図-1で，(x_1, x_2)座標を静止座標，$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$を動座標とし，後者は構造物の横断面に固定されている。この$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$座標原点O'は静止座標に対して速度$\mathbf{a}$，角速度ωで動いているとしよう。動座標系からみた流体の速度を$\bar{u}_i$とすると

$$u_i = a_i + (\bar{u}_j + \omega\alpha_{jn}\bar{x}_n)\beta_{ji} \qquad \cdots\cdots\cdots (3)$$

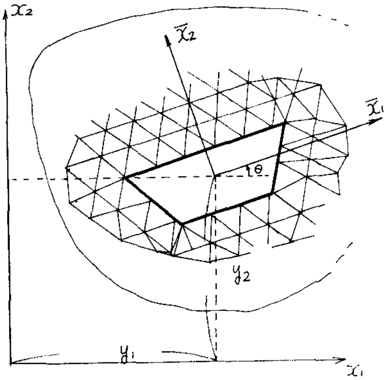

図-1. 振動する逆台形箱げたまわりの要素分割

ここに a_i は $\mathbf{a}$ の i 方向成分，β_{ji} は $\bar{x}_j$ 軸と x_i 軸のなす角の方向余弦である。また $\alpha_{jn} = j - n$ $(j, n = 1, 2)$ である。テンソルの座標変換則

$$\frac{\partial p}{\partial x_i} = \beta_{ji}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_j}, \quad \frac{\partial \tau_{ij}}{\partial x_j} = \beta_{nj}\frac{\partial \tau_{ij}}{\partial \bar{x}_n} = \beta_{ri}\beta_{sj}\beta_{nj}\frac{\partial \bar{\tau}_{rs}}{\partial \bar{x}_n}, \quad \frac{\partial \bar{x}_j}{\partial x_i} = \beta_{ji} \qquad \cdots\cdots (4)$$

なども用いると，動座標系$(\bar{x}_1, \bar{x}_2)$からみた連続の式(1)と運動の式(2)は次のように変換される。

$$\frac{\partial \bar{u}_j}{\partial \bar{x}_j} = 0 \qquad \cdots\cdots\cdots (5)$$

$$\rho\frac{\partial}{\partial t}\{a_i + (\bar{u}_j + \omega\alpha_{jn}\bar{x}_n)\beta_{ji}\} + \rho\bar{u}_j\frac{\partial}{\partial \bar{x}_j}\{a_i + (\bar{u}_j + \omega\alpha_{jn}\bar{x}_n)\beta_{ji}\} + \beta_{ji}\frac{\partial p}{\partial \bar{x}_j} - \beta_{ri}\beta_{sj}\beta_{nj}\frac{\partial \bar{\tau}_{rs}}{\partial \bar{x}_n} = 0 \qquad \cdots\cdots (6)$$

次に式(5)と式(6)を用いて動座標系からみた有限要素（図-1）の定式を行えばよい。このとき有限要素は，動座標系に固定されており，静止座標系に対して運動していることに注意する。

式(5)に $-\delta p$ を乗じ、式(6)に $\delta u_i = \beta_{\ell i}\delta\bar{u}_\ell$ $(\ell, i = 1, 2)$ を乗じて加えあわせ、要素の動座標における領域 $\bar{V}$ にわたって積分する。つぎにGaussの定理を適当に(考えている境界条件に応じて)利用する。例えば領域 $\bar{V}$ の表面 $\bar{S}$ で流速 $\bar{u}_i$ もしくは応力 $\bar{\sigma}_{ij} = -p\delta_{ij} + \bar{\tau}_{ij}$ が規定されているならば

$$\int_{\bar V} \frac{\partial p}{\partial \bar x_j}\delta \bar u_\ell d\bar V = \int_{\bar S} \bar\nu_j p \delta \bar u_\ell d\bar S - \int_{\bar V} p\delta\frac{\partial \bar u_\ell}{\partial \bar x_j} d\bar V, \quad \int_{\bar V}\frac{\partial \bar\tau_{rs}}{\partial \bar x_j}\delta\bar u_\ell d\bar V = \int_{\bar S}\bar\nu_j\bar\tau_{rs}\delta\bar u_\ell d\bar S - \int_{\bar V}\bar\tau_{rs}\delta\frac{\partial\bar u_\ell}{\partial\bar x_j}d\bar V \quad\cdots(7)$$

を用いる。以上の操作と方向余弦の性質 $\beta_{ri}\beta_{si} = 1\ (r=s)$ or $=0\ (r\neq s)$ を利用すれば次式を得る。

$$\int_{\bar V}\rho\beta_{ji}\frac{\partial a_i}{\partial t}\delta\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho\frac{\partial\bar u_j}{\partial t}\delta\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho(\dot\omega\alpha_{jn}\bar x_n - \omega^2\bar x_j)\delta\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho\bar u_j\frac{\partial\bar u_i}{\partial\bar x_j}\delta\bar u_i d\bar V + \int_{\bar V}\rho\omega\alpha_{jn}\bar u_n\delta\bar u_j d\bar V$$

$$-\int_{\bar V}p\delta\frac{\partial\bar u_j}{\partial\bar x_j}d\bar V - \int_{\bar V}\delta p\frac{\partial\bar u_j}{\partial\bar x_j}d\bar V + \int_{\bar V}\bar\tau_{ij}\delta\frac{\partial\bar u_i}{\partial\bar x_j}d\bar V + \int_{\bar S}p\bar\nu_i\delta\bar u_i d\bar S - \int_{\bar S}\bar\nu_i\bar\tau_{ij}\delta\bar u_j d\bar S = 0 \quad\cdots\cdots(8)$$

次に $\bar u_j = \bar u_j^0 + \delta\bar u_j$, $p = p^0 + \delta p$ とし二次以上の微小項を省略すれば、次の汎関数 F を得る。ただし、上指標 ^{0} のつく変量は停留値であり変分に従わず、指標のない量のみが変分に従う。

$$-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}\int_{\bar V}\rho\delta\bar u_j\delta\bar u_j d\bar V - \delta\Big[\int_{\bar V}\rho\beta_{ji}\frac{\partial a_i}{\partial t}\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho\frac{\partial\bar u_j^0}{\partial t}\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho(\dot\omega\alpha_{jn}\bar x_n - \omega^2\bar x_j)\bar u_j d\bar V + \int_{\bar V}\rho\bar u_j^0\frac{\partial\bar u_i^0}{\partial\bar x_j}\bar u_i d\bar V$$

$$+\int_{\bar V}\rho\omega\alpha_{jn}\bar u_n^0\bar u_j d\bar V - \int_{\bar V}p\frac{\partial\bar u_j}{\partial\bar x_j}d\bar V + \int_{\bar V}\bar\tau_{ij}^0\frac{\partial\bar u_i}{\partial\bar x_j}d\bar V + \int_{\bar S}p\bar\nu_i\bar u_i d\bar S - \int_{\bar S}\bar\nu_i\bar\tau_{ij}^0\bar u_j d\bar S\Big] = \delta F \quad\cdots\cdots(9)$$

3. 有限要素法への応用

動座標系における要素節点の流速を $\{\bar v\}$、圧力を $\{p\}$ とすれば、全歪速度ベクトル $\{\bar\varepsilon\}$ は $\{\bar\varepsilon\}=[B]\{\bar v\}$ と表わされる。$[B]$ は $\{\bar u\}=[N]\{\bar v\}$ より導びかれる。また動座標系における構成方程式は静止座標系におけると同じ(直角座標であるから)であり、$\{\bar\tau\}=[D]\{\bar\varepsilon\}=[D][B]\{\bar v\}$ と表わされ、ここに

$$[D]=\mu\begin{bmatrix}2&&0\\&2&\\0&&1\end{bmatrix}$$

である。式(9)を $\{\bar u\}$, $\{\bar\varepsilon\}$, $\{\bar\tau\}$ などを用いて表わし、$\delta F/\delta\{\bar u\}=0$, $\delta F/\delta\{p\}=0$ を行ない、$\{\bar u^0\}=\{\bar u\}$, $\{p^0\}=\{p\}$ とおくと次の連続の式と運動の式を得る。

$$\int_{\bar V}\rho[N]^T[N]d\bar V\cdot\{\dot{\bar v}\} + \int_{\bar V}\rho[N]^T\Big(\sum_{i=1}^{2}\frac{\partial[N]}{\partial\bar x_i}\cdot\{\bar v\}[I_i]\Big)[N]d\bar V\cdot\{\bar v\} - \int_{\bar V}[B]^T\{J\}[C]d\bar V\cdot\{p\} + \int_{\bar V}[B]^T[D][B]d\bar V\cdot\{\bar v\}$$

$$= -\int_{\bar S}p[N]^T\{\bar\nu\}d\bar S + \int_{\bar S}[N]^T[S]\{\bar\tau\}d\bar S - \int_{\bar V}\rho[N]^T[T]\{\dot a\}d\bar V - \int_{\bar V}\rho[N]^T[W]\{\bar x\}d\bar V - \int_{\bar V}\rho\omega[N]^T[E][N]d\bar V\cdot\{\bar v\} \quad (10)$$

$$\int_{\bar V}[C]^T\{J\}^T[B]d\bar V\cdot\{\bar v\} = 0 \quad\cdots\cdots(11)$$

ここに $[W]=\begin{bmatrix}-\omega^2&\dot\omega\\ \dot\omega&-\omega^2\end{bmatrix}$, $[E]=\begin{bmatrix}0&-1\\1&0\end{bmatrix}$, $[T]=\begin{bmatrix}\beta_{11}&\beta_{12}\\ \beta_{21}&\beta_{22}\end{bmatrix}$, $[S]=\begin{bmatrix}\bar\nu_1&0&\bar\nu_2\\0&\bar\nu_2&\bar\nu_1\end{bmatrix}$, $\{J\}=\begin{Bmatrix}1\\1\\0\end{Bmatrix}$

および $[I_1]=[1\ \ 0]$, $[I_2]=[0\ \ 1]$ である。次に流体が構造物に及ぼす力は、図-1の x_1, x_2 方向の並進振動と O' 軸まわりの回転運動を生ぜしめる。その力は $\bar\sigma_{ij}=-p\delta_{ij}+\bar\tau_{ij}$ であるから構造物の運動方程式は

$$[M]\{\ddot d\}+[D]\{\dot d\}+[K]\{d\} = -\int_{\bar A}p[G][T]^T\{\bar\nu\}d\bar A + \int_{\bar A}[G][T]^T\{\bar\tau\}\{\bar\nu\}d\bar A \cdots\cdots(12)$$

ここに $\{d\}=\{y_1\ y_2\ \theta\}$ であり、y_i は x_i 軸方向の変位、θ は O' 軸まわりの回転角である。また

$$[M]=\begin{bmatrix}M&&0\\&M&\\0&&I\end{bmatrix},\quad [H]=\begin{bmatrix}C_1&&0\\&C_2&\\0&&C'\end{bmatrix},\quad [K]=\begin{bmatrix}K_1&&0\\&K_2&\\0&&R\end{bmatrix},\quad [G]=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\\-\bar x_2&\bar x_1\end{bmatrix}$$

であり、M, I は構造物の質量及び慣性モーメント、C_i, C' は構造減衰定数、K_i, R は並進及び回転に対するバネ定数である。結局式(10), (11), (12)を連立に解いて粘性流体中の構造物の応答を数値的に追跡できよう。