

東京工業大学 正員 吉田 裕
東京工業大学 学生員 ○増田 隆紀

§1. まえがき

本報告は円筒殻あるいは初期不整を与えたという意味での疑似円筒殻を対象とし、木圧下における幾何的非線型解析を行なった結果を報告するものである。ここで対象とする木圧下の円筒殻の非線型問題は、対象とする構造物の形状変化に伴って外圧力分布も変化するという、Follower Force 型の問題を構成している。したがって、平衡状態を求める計算過程に、作用外力系の評価過程が追加されるという特徴を有している。等圧力下での薄肉殻構造の非線型問題を扱った研究は多く存在する。^{1), 2)} Follower Force 型の問題を扱ったものとしては、たとえば、細野、川段による、内圧を受ける Membrane Shell の解析がある。³⁾

§2. 解析方法の概要

本節において、 Δ は増分、 e は要素、 $\{ \}$ はベクトル、 $[\]$ は行列を、また n は平衡状態 n に付随することを示すものとする。座標系は全体座標系を基準とし、要素座標系についてはダッシュ ' を用いる。

いま、平衡状態 n から変位が $\Delta \{d\}_{n+1}$ 変化したとすると、もとの平衡状態は乱され、内力が $\Delta \{F\}_{n+1}$ だけ変化する。このとき、変位の増分 $\Delta \{d\}_{n+1}$ に対して、次式が成り立つ。⁴⁾

$$\left. \begin{aligned} \Delta \{F\}_{n+1}^e &= [k_{n+1}]^e \Delta \{d\}_{n+1}^e + [\Delta T]_{n+1}^T \{F_n\}^e \equiv ([k_n]^e + [k_{gn}]^e) \cdot \Delta \{d\}_{n+1}^e \\ [k_n]^e &= [T_n]^e T^T [k']^e [T_n]^e, \quad [k_{gn}]^e = \frac{\partial}{\partial \{d\}} [T_n]^e T^T \{F_n\}^e \end{aligned} \right\} \dots (1)$$

ここで、 $[k]$ は剛性行列、 $[T]$ は全体座標系から要素座標系への変換行列を表わし、 $[k_{n+1}]^e \equiv [k_n]^e$ および $[\Delta T]_{n+1}^T \equiv \frac{\partial}{\partial \{d\}} [T_n]^e T^T \Delta \{d\}_{n+1}^e$ の近似を行なっている。

一方、 $\Delta \{d\}_{n+1}^e$ の形状変化に伴う圧力系の変化による外力項の変化 $\Delta \{P\}_{n+1}^e$ は $\Delta \{F\}_{n+1}^e$ と同様に、次式

$$\left. \begin{aligned} \Delta \{P\}_{n+1}^e &= [T_n + \Delta T]^e T^T \{P_n\}^e + [\Delta T]_{n+1}^T P_n \{\tilde{P}'\}^e \equiv \Delta P_{n+1} \{T_n\}^e T^T \{\tilde{P}'\}^e + [k_{pn}]^e \Delta \{d\}_{n+1}^e \\ [k_{pn}]^e &= \frac{\partial}{\partial \{d\}} [T_n]^e T^T P_n \{\tilde{P}'\}^e \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

で与えられる。ここで、 P_n および ΔP_{n+1} はそれぞれ平衡状態 n における圧力値および圧力値の増分(スカラー)を示し、 $\{\tilde{P}'\}^e$ は、要素座標系での、単位圧力による節点力ベクトルである。

式(1)および式(2)より、平衡状態 n の近傍において、次式が成り立つ。

$$\sum_e \{ \Delta P_{n+1} [T_n]^e T^T \{\tilde{P}'\}^e + [k_{pn}]^e \Delta \{d\}_{n+1}^e \} = \sum_e \{ ([k_n]^e + [k_{gn}]^e) \cdot \Delta \{d\}_{n+1}^e \} \dots (3)$$

これを変形して、 $\Delta \{d\}_{n+1}^e$ の項を右辺にまとめると、圧力値増分と変位増分との関係式、式(4)が得られる。

$$\left. \begin{aligned} \Delta P_{n+1} \{P_n\} &= [K_{tn}] \cdot \Delta \{d\}_{n+1} \\ \{P_n\} &= \sum_e [T_n]^e T^T \{\tilde{P}'\}^e, \quad [K_{tn}] = \sum_e \{ [k_n]^e + [k_{gn}]^e - [k_{pn}]^e \} \end{aligned} \right\} \dots (4)$$

式(4)を持線剛性行列 $[K_{tn}]$ の行列式 $|K_{tn}|$ の値に応じて、(i) $|K_{tn}| > 0$ に対しては、 ΔP_{n+1} を与えて、 $\Delta \{d\}_{n+1}$ を未知量として解き、(ii) $|K_{tn}| = 0$ に対しては、 $[K_{tn}]$ の α -固有ベクトルを $\Delta \{d\}_{n+1}$ とし、(iii) $|K_{tn}| < 0$ に対しては、 $\Delta \{d\}_{n+1}$ の成分のうち何れかを与えて、残りの成分 $\Delta \{d\}_{n+1}$ および ΔP_{n+1} を未知量として解く

5) このようにして得られた $\Delta\{d\}_{n+1}$ を適当にスケールして、これを改めて $\Delta\{d\}_{n+1}$ とし平衡状態 $n+1$ における変位の1次近似 $\{d\}_{n+1}^{(1)} = \{d\}_n + \Delta\{d\}_{n+1}$ を求め、不平衡力に対して次のような収束計算を行ない、平衡状態 $n+1$ における変位 $\{d\}_{n+1}$ に収束させる。

すなわち、先づ、変位の1次近似 $\{d\}_{n+1}^{(k)}$ に対し不平衡力を式(5)で定義する。 λ は式(6)の ε を与える値である。

$$\{f(\lambda)\} = \lambda \sum [T_{n+1}^{(k)}]^T \{P\}^e - \sum [T_{n+1}^{(k)}]^T \{F_n\}^e \dots (5)$$

$$\varepsilon = \min_{\lambda} |\{f(\lambda)\}| \dots (6)$$

次に、 ε が充分小さければ、 $\{d\}_{n+1} \equiv \{d\}_{n+1}^{(k)}$ として次の段階に移り、そうでなければ、式(4)の荷重項に $\{f(\lambda)\}$ を代入して修正変位 $\Delta\{d\}_{n+1}^{(k+1)}$ を計算し、1次近似として $\{d\}_{n+1}^{(k+1)} = \{d\}_{n+1}^{(k)} + \Delta\{d\}_{n+1}^{(k+1)}$ を与える。この過程を ε が充分小さくなるまで繰り返す。変位 $\{d\}_{n+1}$ に平衡する圧力値は、 $p_{n+1} = \lambda p$ である。

なお、この変位増分の1次近似 $\Delta\{d\}_{n+1}^{(1)}$ を求める方法としては、式(4)による他に、前段階までの変位の計算結果 $\{d\}_n, \{d\}_{n-1}, \dots$ を用いて推定する方法が考えられる。6)

§3. 計算例

2節で示した方法により、Fig. 1 に示すような疑似円筒殻(本対称)を解析した結果を示す。Fig. 2 は圧力~最大たわみ(中央点のたわみ)関係である。Fig. 3 は圧力の増加につれて変形の移行してゆく様子を表わしたものである。

§4. むすび

殻構造の Follower Force 型の問題について、変位増分法により幾何的非線型解析を行なった結果を示した。本解析においては、各要素は線型であるものと仮定しているが要素の幾何非線型および材料非線型を考慮した解析を行なう方向で研究を進めている。

§5. 参考文献

- 1) 山本小久保, "外圧を受ける球殻の座屈", 造船学会論文報告集, 昭和48年6月
- 2) 松井松岡, "有限要素法によるツェルの幾何学的非線型問題の解析", マトリクス構造解析法論文集, 昭和48年6月
- 3) 細野川股, "Membrane Shellにおける内圧型 Follower Force に関する考察", 建築学会学術講演梗概集, 昭和47年10月
- 4) ARGYRIS, 'Continuous and discontinua', Proc. Conf. Matrix Meth. in St. Mech., A.F. Inst. of Tech., Wright Patterson A.F. Base, Ohio, Oct. '65
- 5) HANGAI, KAWAMATA, 'Analysis of Geometrically Nonlinear and Stability Problems by Static Perturbation Method', Report of the Inst. of Industrial Science, the University of Tokyo, Vol. 22, No. 5, Jan. 1973.
- 6) 前田 林 中村, "非線型解析における増分法の加速計算法", 土木学会第27回年次学術講演会梗概要集, 昭和47年10月
- 7) OPEN, 'Finite Elements of Nonlinear Continua', McGraw-Hill, 1972.
- 8) 吉田 雨宮 増田, "立体構造解析のための薄板有限要素", 土木学会論文報告集, 昭和48年3月

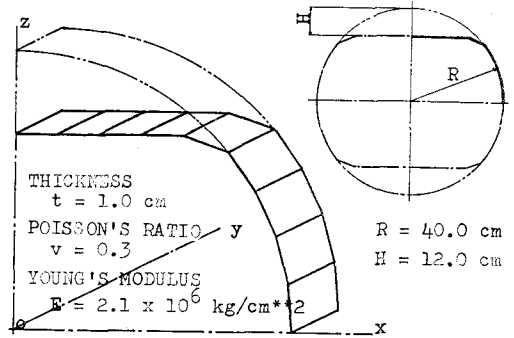


Fig. 1 DIMENSIONS AND CONSTANTS

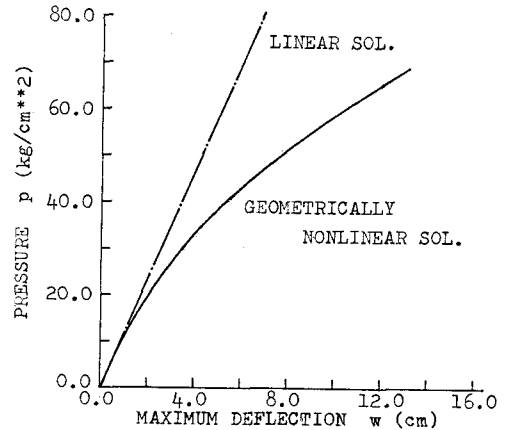


Fig. 2 PRESSURE-MAXIMUM DEFLECTION CURVE

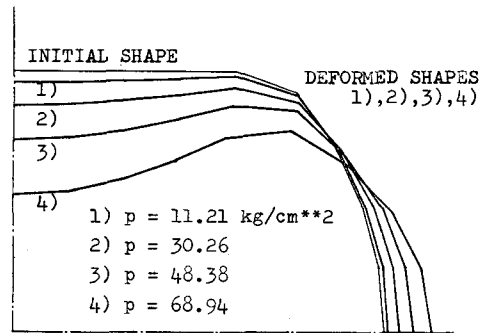


Fig. 3 DEFORMED SHAPES AT VARIOUS EQUILIBRIUM STATES