I-42 　有限要素法における非線形連立代数方程式の解法について

中央大学理工学部　正員　○川原睦人
中央大学理工学部　正員　　大坂一

## 1. 緒言

有限要素法によって，非線形問題を解析する場合かならず生ずる問題として，非線形連立代数方程式を解くことがおこる。一般にこの問題に対しては，くり返えし代入法，ニュートンラプソン法，および増分法が良く用いられる。くり返えし代入法は，何らかの形であらかじめ解を仮定し，線形の連立方程式を解き，その解をあらためて仮定値とし，くり返えし代入しなおして最終的に収束させる方法である。ニュートン-ラプソン法は，この線形連立方程式をその非線形連立代数方程式の解空間における勾配の条件として求める方法である。増分法は，ある解が既知であるとき，その解よりの微小な増分の間に成立すべき関係を求め，この関係によって，順次解をつみかさねて追跡する方法である。ここでは，例として定常ナビエストークス方程式の場合について，くり返えし代入法，ニュートンラプソン法，増分法の収束に対して満足すべき条件を検討する。

## 2. 定常ナビエストークス方程式

総和規約を用いて表わすと，定常ナビエストークス方程式は，次のようになる。

$$v_j v_{i,j} - \nu v_{i,jj} - P_{,i} - g_i = 0 \qquad \text{------}(2.1)$$

$$v_{i,i} = 0 \qquad \text{------}(2.2)$$

ここに，$v_i$は流速，$P$は圧力，$\nu$は動粘性，$g_i$は境界条件により生ずる項である。式(2.1)，(2.2)は$v_i$に関して2次の非線形連立方程式である。式(2.1)，(2.2)に対して有限要素法を用いると，

$$F_\alpha = K_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma + H_{\alpha\lambda} P_\lambda + M_{\alpha\beta} v_\beta - \hat{\Omega}_\alpha = 0 \qquad \text{-------}(2.3)$$

$$G_\lambda = H_{\alpha\lambda} v_\alpha - \hat{\Gamma}_\lambda = 0 \qquad \text{----}(2.4)$$

なる方程式が得られる。* ここに，$v_\beta$は領域全節点における流速，$P$は圧力で$K_{\alpha\beta\gamma}$，$H_{\alpha\lambda}$，$M_{\alpha\beta}$はそれぞれ定数係数，$\hat{\Omega}_\alpha$，$\hat{\Gamma}_\lambda$は境界条件より生ずる項である。

## 3. くり返えし代入法

さて，$\Phi_\alpha$，$x_\alpha$，$A_{\alpha\beta}$，$B_{\alpha\beta}(\xi)$，$y_\alpha$をそれぞれ，

$$x_\alpha = \begin{bmatrix} v_\beta \\ P_\lambda \end{bmatrix}, \quad \Phi_\alpha = \begin{bmatrix} \hat{\Omega}_\alpha \\ \Gamma \end{bmatrix}, \quad A_{\alpha\beta} = \begin{bmatrix} M_{\alpha\beta} & H_{\alpha\lambda} \\ H_{\lambda\mu} & 0 \end{bmatrix}, \quad B_{\alpha\beta}(\xi) = \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta\gamma}\xi_\gamma + K_{\alpha\gamma\beta}\xi_\gamma & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad y_\alpha = \begin{bmatrix} K_{\alpha\beta\gamma} v_\beta v_\gamma \\ 0 \end{bmatrix}$$

とおけば，くり返えし代入法は，

$$x^{(n)} = A^{-1} \{ \Phi - y(v^{(n-1)}) \} \qquad \text{------}(3.1)$$

となる。　いま，式(3.1)を

$$v^{(n)} = \wp(v^{(n-1)}), \quad v \in l_2 \qquad \text{------ (3.2)}$$

と表わせば，バナッハの不動点定理により，任意の $u, v$ に対して，

$$\|\wp(u) - \wp(v)\| < \alpha \|u - v\| , \quad 0 < \alpha < 1 \qquad \text{------ (3.3)}$$

なる定数 $\alpha$ が存在するときに式(3.1)によるくり返えし代入法は収束する。　ここで，

$$\|\wp(u) - \wp(v)\| = \|\delta\wp(\xi)\cdot(u - v)\| \leqq \|\delta\wp(\xi)\|\cdot\|u - v\| \qquad \text{------ (3.4)}$$

であるから，式(3.5)式が収束の条件となる。

$$\|\delta\wp(\xi)\| = \|A^{-1}\cdot B(\xi)\| \leqq \|A^{-1}\|\cdot\|B(\xi)\| < \alpha , \quad \forall \xi \in l_2 \qquad \text{---- (3.5)}$$

定理 1.　$\lambda_0$ は $A$ の最小固有値 $\Lambda(\xi)$ は $B(\xi)$ の最大固有値とするとき，

$$\Lambda(\xi)/\lambda_0 < 1 \qquad \text{------- (3.6)}$$

が任意の $\xi$ について成立するならば，くり返えし代入法(3.1)は収束する。
証明：　式(3.5)より導びかれる。

4. ニュートンラプソン法.
式(2.1),(2.2)について，ニュートンラプソン法は，次のように定式化される。まず第 $n$ 回目のくり返えし計算によって求まる流束と圧力を

$$v_i^{(n)} = v_i^{(n-1)} + \bar{v}_i^{(n)} , \qquad p^{(n)} = p^{(n-1)} + \bar{p}^{(n)} \qquad \text{------- (4.1), (4.2)}$$

とする。$\bar{v}_i^{(n)}$ と $\bar{p}^{(n)}$ は次の線形方程式を解くことによって求められる。

$$\bar{v}_j^{(n)} v_{i,j}^{(n-1)} + v_j^{(n-1)} \bar{v}_{i,j}^{(n)} - \nu \bar{v}_{i,jj}^{(n)} + \bar{P}_{,i}^{(n)} + \phi_i^{(n-1)} = 0 \qquad \text{------- (4.3)}$$

ここに，

$$\phi_i^{(n)} = v_j^{(n)} v_{i,j}^{(n)} - \nu v_{i,jj}^{(n)} + P_{,i}^{(n)} - g_i = \bar{v}_j^{(n)} \bar{v}_{i,j}^{(n)} \qquad \text{-------- (4.4)}$$

である。さて，内積およびノルムをそれぞれ，

$$(u_i, v_i) = \int_V (u_i v_i)\, dV , \quad \|u\| = (u_i, u_i)^{\frac{1}{2}}, \quad \|\nabla u\| = (u_{i,j}, u_{i,j})^{\frac{1}{2}} \qquad \text{------ (4.5), (4.6), (4.7)}$$

としておく。また，$C_\Omega$, $B_\Omega$ をそれぞれ，

$$C_\Omega = \sup \frac{\|u\|}{\|\nabla u\|} , \qquad B_\Omega = \inf \frac{\|u\|}{\|\nabla u\|} \qquad \text{------- (4.8), (4.9)}$$

なる定数とする。さらに，不等式

$$|(v_i, u_i)| \leqq \|v\|\cdot\|u\| , \qquad |(v_i, v_j w_{i,j})| \leqq 2\|\nabla w\|\cdot\|v\|\cdot\|\nabla v\| \qquad \text{----- (4.10), (4.11)}$$

が成り立つ。　ここで

$$\bar{v}_{i,i}^{(n)} = 0, \qquad \int_S (\bar{v}_i^{(n)} \bar{v}_i^{(n)} v_j^{(n-1)}) n_j \, dS = 0 \qquad \text{---- (4.12), (4.13)}$$

$$\nu\int_S(\bar{v}_i^{(n)}\bar{v}_{i,j}^{(n)})n_j\,dS=0\quad,\qquad \int_S(\bar{v}_i^{(n)}p)n_i\,dS=0 \qquad \text{------ (4.14), (4.15)}$$

が成立するとするとき、ニュートンラプソン法(4.1)～(4.4)に関して次の定理が成り立つ。

定理 2. 式(4.1)～(4.4)で与えられるニュートンラプソン法は，初期値として，仮定する $v_i^{(0)}$ が条件

$$\|\phi^{(0)}\|<\left(\frac{\nu^2\delta_{min}}{2B_\Omega C_\Omega^3}\right)^2 \qquad \text{------ (4.16)}$$

を満足し，各くり返し計算途中において，つねに

$$\delta_{min}=\inf_n\left(1-\frac{2C_\Omega\|\nabla v^{(n)}\|}{\nu}\right)>0 \qquad \text{------ (4.17)}$$

が成立するならば，収束する。ここに $\|\nabla v^{(n)}\|$ は n 回目の流速 $v_i^{(n)}$ のノルムである。

## 5. 増分法

いま，ある $\tilde{f}_i$ が与えられたときの正解を $\tilde{v}_i$，$f_i$ が $g_i=f_i-\tilde{f}_i$ だけ増加したときの正解を $v_i$，その増分を $u_i$ とする。すなわち　$v_i=u_i+\tilde{v}_i$ とする。このとき，

$$(u_j+\tilde{v}_i)u_{i,j}+u_j\tilde{v}_{i,j}-\nu u_{i,jj}-P_{,i}=g_i \qquad \text{------ (5.1)}$$

が成立する。これに対して，増分法により計算する増分 $\bar{v}_i$ は，

$$\tilde{v}_j\bar{v}_{i,j}+\bar{v}_j\tilde{v}_{i,j}-\nu\bar{v}_{i,jj}-\bar{P}_{,i}=g_i \qquad \text{------- (5.2)}$$

により求められたものである。そこで，$\bar{\bar{v}}_i=\tilde{v}_i+v_i$ と $v_i=u_i+\tilde{v}_i$ との差，

$$\beta=\|v_i-\bar{\bar{v}}_i\|=\|u_i-\bar{v}_i\|=\|v_i^*\| \qquad \text{------- (5.3)}$$

が，ある値以下であればよい。$\|v_i^*\|$ について次の定理が成り立つ。

定理 3. 境界条件の増分 $\|g\|$ に対して，増分法(5.2)による解と正解との誤差は，

$$\|v^*\|\leqq\frac{C_\Omega^4}{\nu^2\left(1-\frac{2C_\Omega\|\nabla\tilde{v}\|}{\nu}\right)^3}\|g\|^2 \qquad \text{------ (5.4)}$$

で与えられる。

## 6 結言

くり返し代入法による場合任意の $g$ に対して式(3.6)が成り立つ必要がある。これに対してニュートンラプソン法によれば，式(4.17)の下に初期値を式(4.16)が満足されるように選択すれば収束させることができる。増分法による場合は式(5.4)による $\|v^*\|$ がある一定値より小さくなるように $\|g\|$ を選べばよいことがわかる。

参考文献

1). M. Kawahara, N. Yoshimura, K. Nakagawa and H. Ohsaka ; "Steady Flow Analysis of Incompressible Viscous Fluid by the Finite Element Method", Tokyo Seminar, 1973