I-41 非線形バネ承上梁の有限要素法について

中央大学理工学部 正員 ○大坂 一
中央大学理工学部 正員 川原睦人

1．緒言

一般に地盤上に構築される管路構造，杭構造などは，バネ承上の梁として解析される場合が多い。この時，バネ反力として線形バネと仮定することもあるが，実験的考察 [1] により，このバネ反力は非線形であることが指摘されている。梁の変位を ω，バネ反力を $f(\omega)$ で表わすと，$f(\omega)=k\omega^{n}$ で与えられ，砂地盤では $n=0.5$ であると言れている。ここでは $f(\omega)$ が一般的に ω の非線形関数で与えられる場合のバネ承上梁に有限要素法を適用する時に問題となる点について得られた結果を報告する。まず第一点は非線形バネ承上梁の基礎方程式に対する汎関数を見つけ，有限要素法の定式化を行なうことである。第二点は非線形方程式の解法において問題となる収束問題に対して，単純反復法の収束する十分条件を求めた。 式は総和記表を用いて表わす。

2．汎関数と有限要素法による定式化

非線形バネ承上梁の基礎方程式は (1) 式で与えられる。

$$EI\frac{d^4\omega}{dx^4}=P(x)-f(\omega) \qquad 0\leq x\leq \ell \qquad \cdots(1)$$

ω；変位，E；ヤング率，I；断面2次モーメント
$P(x)$；荷重，$f(\omega)$；バネ反力，ℓ；梁長

ここでバネ反力の特性として (2) 式，境界条件として (3) 式の場合について考える。

$$f'(\omega)\geq 0 \qquad \cdots\cdots\cdots(2)$$

$$\left.\begin{array}{l}x=0\\ x=\ell\end{array}\right\}\text{で}\quad \frac{d\omega}{dx}=0 \text{ 又は } \frac{d^2\omega}{dx^2}=0 \text{ かつ } \frac{d^3\omega}{dx^3}=0 \text{ 又は } \omega=0 \qquad \cdots(3)$$

(1) 式に対する変分 $F[\omega]$ は (4) 式で与えられる。

$$F[\omega]=\int_0^{\ell}\left\{\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2-P(x)\cdot\omega+\int_0^{\omega}f(\eta)d\eta\right\}dx \quad \cdots(4)$$

(4) 式が (1) 式の変分になっていることの証明は (2)，(3) 式を使用して $F[\omega+\delta\omega]$ を変形することにより得られる。

$$F[\omega+\delta\omega]=\int_0^{\ell}\left\{\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2\omega}{dx^2}\right)^2-P(x)\cdot\omega+\int_0^{\omega}f(\eta)d\eta\right\}dx + \int_0^{\ell}EI\frac{d^2\omega}{dx^2}\frac{d^2\delta\omega}{dx^2}dx+\int_0^{\ell}(-P(x))\delta\omega dx+\int_0^{\ell}\left\{\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f(\eta)d\eta\right\}dx+\int_0^{\ell}\frac{1}{2}EI\left(\frac{d^2\delta\omega}{dx^2}\right)^2dx \quad \cdots(5)$$

(5) 式の右辺第2項は部分積分を2回行なうと，境界条件 (3) より $\int_0^{\ell}EI\frac{d^4\omega}{dx^4}\delta\omega dx$ となり，第4項は，

$$\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f(\eta)d\eta=\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f(\omega)d\eta+\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}\{f(\eta)-f(\omega)\}d\eta$$
$$=f(\omega)\delta\omega+\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}\{f(\eta)-f(\omega)\}d\eta \quad \cdots(6)$$

ここで $f'(\eta)\geq\gamma$ とすると平均値の定理より，

$$\frac{f(\eta)-f(\omega)}{\eta-\omega}\geq f'(\xi)\geq\gamma, \qquad |\omega-\xi|\leq|\omega-\eta|$$

$$\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}\{f(\eta)-f(\omega)\}d\eta\geq\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}\gamma(\eta-\omega)d\eta=\frac{1}{2}\gamma(\delta\omega)^2 \quad (7)$$

(7) 式，(2) 式を (6) 式に代入すると，

$$\int_{\omega}^{\omega+\delta\omega}f(\eta)d\eta\geq f(\omega)\delta\omega \qquad \cdots\cdots\cdots(8)$$

が得られ，以上より (5) 式は次のように変形される

$$F[\omega+\delta\omega]=F[\omega]+\delta F[\omega]+\delta^2F[\omega]$$

$$\delta F[\omega]=\int_0^{\ell}\left\{EI\frac{d^4\omega}{dx^4}-P(x)-f(\omega)\right\}\delta\omega dx$$

$$\delta^2F[\omega]\geq\frac{1}{2}\int_0^{\ell}EI\left(\frac{d^2\delta\omega}{dx^2}\right)^2dx$$

有限要素法による近似解を (9) 式で表わし，変分 (4) に代入すると (10) 式が得られる。

$$\omega=a_i\omega_i \qquad \begin{array}{l}a_i \text{ 接点変位}\\ \omega_i \text{ 形状関数}\end{array} \qquad \cdots(9)$$

$$F[\omega]=\int_0^\ell\left\{\frac{1}{2}EI\,a_i a_j\frac{d^2\omega_i}{dx^2}\frac{d^2\omega_j}{dx^2}-P(x)a_i\omega_i+\int_0^{a_i\omega_i}f(\eta)d\eta\right\}dx \quad \cdots\cdots (10)$$

これを a_i で偏微分すると,

$$\frac{\partial F[\omega]}{\partial a_i}=\int_0^\ell\left\{\frac{1}{2}EI\frac{d^2\omega_i}{dx^2}\frac{d^2\omega_j}{dx^2}a_j-P(x)\omega_i+\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\int_0^{a_j\omega_j}f(\eta)d\eta\right)\right\}dx$$

となり, $\frac{\partial}{\partial a_i}\left(\int_0^{a_j\omega_j}f(\eta)d\eta\right)=f(a_j\omega_j)\omega_i$ を使用すると,

$$K_{ij}a_j=P_i-F_i(a_j) \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (11)$$

$$K_{ij}=\int_0^\ell EI\frac{d^2\omega_i}{dx^2}\frac{d^2\omega_j}{dx^2}dx \quad ;\text{スチフネスマトリックス}$$

$$P_i=\int_0^\ell P(x)\omega_i\,dx \quad ;\text{荷重項}$$

$$F_i(a_j)=\int_0^\ell f(a_j\omega_j)\omega_i\,dx \quad ;\text{バネ反力項}$$

が非線形バネ承上梁の有限要素法による定式化として得られる。

3. 単純反復法による収束

単純反復法による(11)式の解法は K_{ij} の逆行列の元を k_{ij} とすると以下のようになる。

$$a_i^{(0)}=0$$

$$a_i^{(1)}=k_{ij}P_j$$

$$a_i^{(2)}=k_{ij}P_j-k_{ij}F_j(a_k^{(1)})$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$a_i^{(n)}=k_{ij}P_j-k_{ij}F_j(a_k^{(n-1)})$$

この操作をくりかえし, $a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)}$ がすべての i について十分小さくなった時に収束したものとする。

反復法による係数 $a_i^{(n)}$ の収束性をみてみると,

$$a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)}=k_{ij}\left(-F_j(a_k^{(n-1)})+F_j(a_k^{(n-2)})\right)$$

$$|a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)}|\leq|k_{ij}||F_j(a_k^{(n-1)})-F_j(a_k^{(n-2)})| \quad (12)$$

が得られる。さらに精密に(12)式を評価するために,変位に対するバネ反力の有界性 $|f'(\omega)|<\Gamma$ を導入する。平均値の定理より,

$$\left|\int_0^\ell f(a_k^{(n-1)}\omega_k)\omega_j dx-\int_0^\ell f(a_k^{(n-2)}\omega_k)\omega_j dx\right|$$

$$\leq\int_0^\ell|f(a_k^{(n-1)}\omega_k)-f(a_k^{(n-2)}\omega_k)||\omega_j|dx$$

$$\leq\int_0^\ell|\Gamma(a_k^{(n-1)}\omega_k-a_k^{(n-2)}\omega_k)||\omega_j|dx$$

$$\leq\Gamma\left\{\int_0^\ell|\omega_j||\omega_k|dx\right\}|a_k^{(n-1)}-a_k^{(n-2)}| \quad \cdots\cdots (13)$$

$h_{jk}=\int_0^\ell|\omega_j||\omega_k|dx$ とすると, (13), (12) 式より係数の収束評価式 (14) が得られる。

$$|a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)}|\leq\Gamma|k_{ij}|\cdot|h_{jk}||a_k^{(n-1)}-a_k^{(n-2)}| \quad \cdots\cdots (14)$$

ここで $C_{ik}=|k_{ij}|\cdot|h_{jk}|$, $C=\max C_{ik}$ とし, (14)式の両辺の i に関する和をとると,

$$\sum_{i=1}^N|a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)}|\leq\Gamma\cdot C\cdot N\left(\sum_{i=1}^N|a_i^{(n-1)}-a_i^{(n-2)}|\right) \quad \cdots (15)$$

が得られ, 反復法の収束のための十分条件として

$$\Gamma\cdot C\cdot N<1 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (16)$$

が得られる。但し, N は自由度総数である。

このことより, 地盤のバネ定数とみなせる $f(\omega)$ が $|f'(\omega)|<\Gamma<1/C\cdot N$ であれば 反復法で十分収束することが保証される。

4. 例題

k_{ij} が梁の影響線係数となっているので, 形状関数を3次式にすると k_{ij} の最大値を知ることができる。このことより, a_i として節点変位 y_i, 及び回転角 θ_i を用い, 形状関数として3次式を使用して, C·N の評価を行なう。ここで梁を n 分割し, 各要素の長さを h_i で表わす。

N は境界条件を考慮すると $N\leq 2n$ となるから,

$$N<\frac{2\ell}{\min h_i} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (17)$$

となる N の評価式を得る。

ここで k_{ij}, h_{ij} を次のように小行列の形で書くと

$$K=[k_{ij}]=\begin{bmatrix}K_{11}&K_{12}\\K_{21}&K_{22}\end{bmatrix} \quad H=[h_{ij}]=\begin{bmatrix}H_{11}&H_{12}\\H_{21}&H_{22}\end{bmatrix}$$

(小行列の添字は 1が変位, 2が回転角を表わす。)

, 又 $\max|A|$ で行列 A の各元の絶対値の最大を表わすものとすると, H_{ij} の各列に非零要素が3個以下であることから, C は次式でおさえることができる。

$$C\leq 3\times\max_{\substack{i=1,2\\k=1,2}}\left(\max|K_{ij}|\cdot\max|H_{jk}|\right) \quad \cdots\cdots (18)$$

K_{ij} の最大値を求めると

$$\max|K_{11}|\leq C_{11}\frac{\ell^3}{EI}, \quad \max|K_{12}|\leq C_{12}\frac{\ell^2}{EI}$$

$$\max|K_{21}|\leq C_{21}\frac{\ell^2}{EI}, \quad \max|K_{22}|\leq C_{22}\frac{\ell}{EI} \quad (19)$$

ここで C_{ij} は境界条件によって異なる定数で, $C_{21}=C_{12}$ となる。

H_{ij} の最大値は次のようになる。

$$\max|H_{11}| \leq \frac{26}{35}\max h_i$$
$$\max|H_{12}| = \max|H_{21}| \leq \frac{11}{105}(\max h_i)^2 \qquad (20)$$
$$\max|H_{22}| \leq \frac{2}{105}(\max h_i)^3$$

$l>1,\ l \gg \max h_i$ のもとに，(19),(20)式を(18)式に代入してみると

$$C \leq \frac{3}{EI}\max h_i\, l^2\left(\frac{26}{35}C_{11}l + \frac{11}{105}C_{12}\max h_i\right)$$
$$\fallingdotseq \frac{78}{35EI}\max h_i \cdot C_{11}\cdot l^3 \qquad \cdots (21)$$

(17),(21)式を(16)式に代入すると

$$\Gamma < \frac{35}{C_{11}\times 156}\,\frac{EI}{l^4}\,\frac{\min h_i}{\max h_i} \qquad \cdots\cdots (22)$$

が得られ，これは反復法収束のための一つの十分条件となっている。

特に両端完全固定の場合は，$C_{11}=1/192$，又メッシュサイズを等メッシュとすると，(22)式より次式のように具体的な収束条件を得ることができる。

$$\Gamma \leq \frac{560}{13}\frac{EI}{l^4} \fallingdotseq 43.0\frac{EI}{l^4}$$

5. 結言

以上の結果より次のような推論を得ることができる。

1, 等メッシュの時，(21)式より，メッシュサイズが小さくなる程，収束可能なΓの値を大きくとることができる。ただしメッシュサイズを無限に小さくとっても，収束可能なΓの値がおさえられることが(22)式より推論できる。

2. 土の剛性率 $f'(0)$ が小さい程，又ロ梁の剛性 EI/l^4 が大きい程収束しやすい。

砂地盤の場合にバネ反力を $k\sqrt{\omega}$ で(1)式を解くと $f'(0)=\infty$ となり，反復計算の収束が悪くなることが考えられる。そこで，変位が微小の時はバネ反力を線形とし，変位が一定値以上となった時 $k\sqrt{\omega}$ とした方がよい。これは地盤に初期弾性を導入することと等価である。

反復法と同様に Newton-Raphson 法に対する収束の十分条件を調べてみると，(16)式と同様の式を得る。しかし，反復法と Newton-Raphson 法の違いは収束の早さと，(16)式が Newton-Raphson 法では解の安定性を意味することである。Newton-Raphson 法による(11)式の定式化は次のようになる。

$$\{K_{ij}-H_{ij}(a^{(n-1)})\}(a_j^{(n)}-a_j^{(n-1)}) = -K_{ij}a_j^{(n-1)}+P_i+F_i(a^{(n-1)})$$

ここで $H_{ij}(a^{(n-1)}) = \int_0^l f'(a_k^{(n-1)}\omega_k)\,\omega_i\omega_j\,dx$ とする。

この式を変形することによって次の収束条件式を得る。

$$a_i^{(n)}-a_i^{(n-1)} = S_{ij}T_{jk}U_{klm}(a_l^{(n-2)}-\xi_l)(a_m^{(n-2)}-\xi_m)$$

$$S_{ij}=[\delta_{ab}-T_{ab}H_{bc}]^{-1}_{ij} \qquad T_{jk}=[K_{ab}]^{-1}_{jk} \qquad U_{klm}=\int_0^l f''(a_a^{(n-2)}\omega_a)\,\omega_k\omega_l\omega_m\,dx$$
$$|a_l^{(n-2)}-\xi_l| \leq |a_l^{(n-2)}-a_l^{(n-1)}|$$

S_{ij} はマトリックスで表現すると $(I-K^{-1}H)^{-1}$ となっており，適当なノルムを使用すると，(16)式 $\|K^{-1}H\|<1$ が満足される時，$\|S\| < \left(1/(1-\|K^{-1}\|\|H\|)\right)$ とおさえられ，次の評価式が得られる。

$$\|a^{(n)}-a^{(n-1)}\| \leqq \frac{1}{1-\|K^{-1}\|\|H\|}\|K^{-1}\|\|U\|\|a^{(n-1)}-a^{(n-2)}\|^2$$

1) 久保浩一 "杭の横抵抗に関する実験的研究(その1～3)" 運輸技術研究所報告 11, No.6, 1961, 11 No.12, 1962, 12 No.2, 1962
2) P.G. Ciarlet, M.H. Schultz and R.S. Varga "Numerical Methods of High-Order Accuracy for Non linear Boundary Value Problem" Numer. Math. 9 (394-430) (1967)