I-40　有限要素法における剛性マトリックス組立の有効なプログラム法

運輸省港湾技術研究所　正会員○岩崎峯夫

1．SF法による剛性マトリックス組立，記憶法

この方法は、各要素の剛性マトリックスを順次求め，それを重ね合わす一般の方法と異なり，全体の剛性マトリックスの各要素に対する寄与を計算する方法であり，各節点ごとに演算をして，全体の剛性マトリックスの各節点に対する行要素を求めて，シーケンシャルに内部コア，または，外部記憶装置に出力する方法である。この方法は，重ね合わせの場を必要としないので，大容量の内部コア，または，ダイレクトアクセス可能な外部記憶装置を必要とせず，ダイレクトアクセスしないので時間的にもすぐれている。

全体の剛性マトリックスの節点に関する行要素を求めるには、二つの演算部分に分かれる。それは、対角値を求める場合と，非対角値を求める場合である。

a）対角値を求める方法

構造全体の剛性マトリックスの節点iに関する対角値を求めるには、その節点iを共有しているすべての要素について次の計算を行ない加え合わせばよい。

$$[k_{ii}]=\int[B_i]^T[D][B_i]\,d(vol) \tag{1}$$

b）非対角値を求める方法

節点iから放射している線分（三次元問題では稜）を共有するすべての要素について次式の計算を行ない，加え合わせば，線分（稜）1本について計算が終る。この線分の他端の節点番号をjとする。

$$[k_{ij}]=[k_{ji}]=\int[B_i]^T[D][B_j]\,d(vol) \tag{2}$$

この計算により全体の剛性マトリックスのi行j列またはj行i列の値が求められる。この計算を節点iから放射している線分すべてについて行なうと，節点iに関する剛性マトリックスの非対角値がすべて求められる。

この方法により順次節点に関してこれらの計算を行ない，剛性マトリックスの行の値を求めてゆき，シーケンシャルに出力し，一次元配列に記憶でき，全体の剛性マトリックスのシーケンシャルファイルが得られる。この方法をSF法と名ずける。なお，(1)，(2)式の変数記号は、文献1）に従う。

2．SF法の特色

a）剛性マトリックスのシーケンシャルファイルが直接に得られる。非零要素のみのファイルである。

b）節点に関する行要素ごとに出力されるので，傾斜支持などに行なう局部座標変換がたやすくでき，一般の方法では全体の剛性マトリックスができ上ってから行なうのに対し，そのつど座標変換してシーケンシャルに出力できる。また幾何的インプットデータのみ記憶できる内部記憶容量があれば剛性マトリックスが組立てられる。

c）剛性マトリックスは対称であるので，上三角要素のみ記憶する場合，（2）式で$i<j$の場合のみ計算を行なうようにすれば容易に得られ，記憶容量を有効に利用できる。

d）節点に関する行要素の列番号を示す索引を必要とするが，シーケンシャル出力であることを利用して，先頭にその行のサブマトリックス$[k_{ij}]$の個数を入れ，その次から列の番号を示す索引を入れる。この索引は，サブマトリックスごとにつけるので，二次元の場合，剛性マトリックスの数の$1/4$，三次元の場合は，$1/9$で済む。

e）バンドマトリックス法では、隣接する節点間における節点番号の差の最大値により記憶場所の大きさが決ま

り，逆にその差の大きさが制限されている。また，索引付バンドマトリックス法でも、節点の回りの要素数の最大値により記憶場所の大きさが決まり、その最大値が制限される。SF法では、それらに制限されることはない。
6）連立方程式を直接法で解く場合，消去分解過程で非零要素が発生する。SF法では、節点に関する行要素を求める時に，以前の節点に関する行要素がこの行要素のどこに寄与するか判断できるので，消去分解過程で発生する非零要素のための記憶場所を確保しながら一次元配列に記憶できる。

3. SF法により組立てられた剛性マトリックスの連立一次方程式の解法

SF法は，反復法に対して非常に有効であることがわかるが，直接法に対しても有効である。以上の特色を生して，直接法プログラムを作成した。解法は，コレスキー分解[2] $K=R^TD^{-1}R$ を用いた。Rは，上三角，Dは，対角マトリックスでRの対角要素に等しい。外部ファイルを4個用意する。Aは，分解過程で発生する非零要素のための記憶場所を持つ上三角の一次元配列になった剛性マトリックスのファイル。Bは，分解されたマトリックス（D^{-1}とRの非対角要素）を記憶するファイル。E＆Fは，分解中内部記憶の中に寄与される要素がまだ読み込まれてない時に，寄与を記憶するファイルで，flip flop的に用いる。行列の分解は，節点に関する行要素（一要素はサブマトリックスより成る）の行ごとに行なう。まず内部記憶に入るだけAファイルより読み込む。分解しようとする行の節点(行)番号がファイルEorFに記憶されている全寄与の寄与する節点(行)番号のうちの最小値に等しいか，大きい時ファイルEorFの全寄与を読み込み寄与計算する。もし寄与される要素がまだ内部記憶に読み込まれていない寄与は，再びEorFに書き込む。このようにすることにより，節点ごとに毎回EorFの寄与計算をしないですむ。つぎに，r_{kk}の逆行列 $d_{kk}^{-1}=r_{kk}^{-1}$ を求める。寄与 $C_{ij}=r_{ki}^T d_{kk}^{-1} r_{kj}$ ただし $j \geq i$ を節点 k に関する全てのサブマトリックスの組合せについて計算し，要素 r_{ij} より C_{ij} を差し引く。要素 r_{ij} の記憶場所の検索は，節点番号 i と対角要素 r_{ii} の位置の関係を示す配列を作っておき，行要素の索引のみ検索する。もし要素 r_{ij} がまだ内部記憶に読み込まれていないと C_{ij} はEorFに書き込まれる。つぎに分解された節点 k に関する行要素をファイルBに移す。移されて不用になった内部記憶へ，まだ読み込まれていない次の要素をAから同数読み込む（リング法）。以上の操作をくり返して，RとD^{-1}が求められ，前進，後進代入により解が得られる。リング法とは，線状の記憶の始めと終りを概念的に連結してリング状に記憶する方法で，上の操作中リング上のデータの順序は，くずれることがなく，データの出入ごとに再配列する必要がない（バンドマトリックスでは，ドラム法）。線状の記憶の長さをN個とすると，剛性マトリックスL番目のサブマトリックスは，リング上でM番目に記憶される。ただしM=MOD(L,N)，IF(M.EQ.0)M=Nである。このプログラムでは，解法上の制約がほとんどなく，剛性マトリックスが内部記憶に入る場合では，ファイル一切用いず計算し，入らない場合でもバンドマトリックス法で解ける問題（(バンド幅+1)^{2}個のサブマトリックスの記憶容量が内部記憶にある）は，E＆Fを用いることなく解く。計算時間に関しても，非零要素のみ計算し，全てシーケンシャルアクセスを用いているので効率よく，バンドマトリックス法では実際の構造のバンド幅と内部記憶のバンド幅が一致しないと効率が悪いが，この方法ではそのような問題は生じない。小さな問題から大きな問題まで計算機の容量に応じて効率よく処理する方法と言える。32K記憶単位の計算機を用い，全インプットデータを記憶する方法で，2,3次元問題では，約1500節点の剛性マトリックスが組立てでき，反復法，上述の方法で解ける。

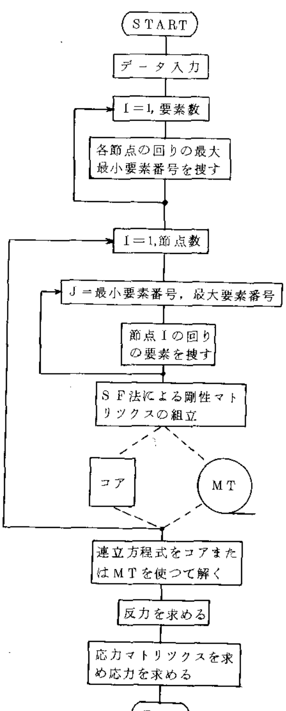

Fig.1 SF法による解法

参考文献

1) ツェンキーヴィッツ，O.C.＆チューン.Y.K 原著：マトリックス有限要素法
2) 例えば，信原泰夫他：有限要素法のプログラムデザイン，培風館
3) 岩崎峯夫：剛性マトリックス組立の有効な一方法，港湾技術研究所報告第11巻第1号