I-39　平板の剛性マトリックスに対する一考察

法政大学　正員　大地羊三

1. まえがき

平板要素の剛性マトリックスに関する論文は非常に多く応接にいとまがない。これらは，(1) 要素の各辺におけるNormal Slope（法線方向の勾配）の連続条件を満足しない非適合要素，(2) 節点の自由度をふやしたり，辺に新らしく節点をもうけて適合要素にしたもの，(3) 要素を細分し，それぞれで別の変形関数を定義した後，組合せて適合要素にしたもの，(4) シェル要素の特別な場合として平板要素を定義したもの，(5) 応力を仮定したHibrid法，(6) 其他（Tong，Herrman，Agirio 等の方法）に分類される。本報告は最近発表された(4)，(5)の分類に入る要素を検討した上で新らしい要素の提案をしようとするものである。

2. せん断変形を考慮したアイソパラメトリック法

アイソパラメトリック法を用いたシェル要素[(1)(2)]の特別な場合として平板要素の剛性マトリックスを作ると次のようになる。まず形状関数$\bar{g}_i(\xi,\eta)$を用いて，座標変換を式(1)のように定義する。式(2)，(3)はこの場合のヤコビアンおよびその逆行列である。

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} \bar{g}_i & 0 \\ 0 & \bar{g}_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_i \\ y_i \end{bmatrix} \cdots (1) \qquad \mathbb{J} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \xi} & \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \bar{g}_1}{\partial \eta} & \frac{\partial \bar{g}_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial \bar{g}_n}{\partial \eta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{bmatrix} \equiv \begin{bmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{bmatrix} \cdots (2) \qquad \mathbb{J}^{-1} \equiv \begin{bmatrix} k_{11} & k_{12} \\ k_{21} & k_{22} \end{bmatrix} \cdots (3)$$

これらを用いると，せん断変形を考慮した平板のひずみと変形の関係式は式(4)のようになる。さらに応力とひずみの関係式を式(5)のように定義しておく。

$$\begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \hline \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial y} + \frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ \hline \theta_y + \frac{\partial w}{\partial x} \\ -\theta_x + \frac{\partial w}{\partial y} \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{11} \\ 0 & -k_{21} & 0 \\ 0 & -k_{11} & k_{21} \\ \hline k_{11} & 0 & 0 \\ k_{21} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial \xi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & k_{12} \\ 0 & -k_{22} & 0 \\ 0 & -k_{12} & k_{22} \\ \hline k_{12} & 0 & 0 \\ k_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial w}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta_x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial \theta_y}{\partial \eta} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} \right\} \cdots (4)$$

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ \hline S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \left[\begin{array}{ccc:cc} d_{11} & d_{12} & 0 & 0 & 0 \\ d_{21} & d_{11} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} & 0 & 0 \\ \hdashline 0 & 0 & 0 & d_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & d_{44} \end{array} \right] \begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \hline \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} \cdots (5)$$

ただし χ_x, χ_y は曲率，χ_{xy} はねじり率，γ_x, γ_y はせん断変形，M_x, M_y は曲げモーメント，M_{xy} はねじりモーメント，S_x, S_y はせん断力

ここで変形として式(6)を仮定し，式(4)に代入すると，ひずみは式(7)のようになる。

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} g_i(\xi,\eta) & 0 & 0 \\ 0 & g_i(\xi,\eta) & 0 \\ 0 & 0 & g_i(\xi,\eta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \cdots (6)$$

$$\begin{bmatrix} \chi_x \\ \chi_y \\ \chi_{xy} \\ \hline \gamma_x \\ \gamma_y \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} \begin{bmatrix} 0 & 0 & a_i \\ 0 & -b_i & 0 \\ 0 & -a_i & b_i \\ \hline a_i & 0 & 0 \\ b_i & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} \cdots \left(\begin{array}{l} \text{ただし} \\ a_i \equiv k_{11}\frac{\partial g_i}{\partial \xi} + k_{12}\frac{\partial g_i}{\partial \eta} \\ b_i \equiv k_{21}\frac{\partial g_i}{\partial \xi} + k_{22}\frac{\partial g_i}{\partial \eta} \end{array} \right) \cdots (7)$$

簡単のために式(5)を $\sigma = \mathbb{D}\varepsilon$，式(7)を $\varepsilon = \sum \mathbb{B}_i g_i$ と書く事にすると，i節点とj節点を結ぶ剛性マトリックスは $\mathbb{k}_{ij} = \int \mathbb{B}^T \mathbb{D} \mathbb{B}\, dA$ で計算できる。とくに三角形要素の頂点だけを節点に選び $\bar{g}_i = g_i = L_i$（L_i は面積座標：$i = 1 \sim 3$）として $\mathbb{k}_{ij}$ を計算すると

$$\boxed{\mathbb{k}_{ij} = \frac{d_{11}}{4A} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & (x_{jk}x_{ki} + y_{jk}y_{ki}\mu) & (x_{jk}y_{ki}\nu + y_{jk}x_{ki}\mu) \\ 0 & y_{jk}x_{ki}\nu + x_{jk}y_{ki}\mu) & (y_{jk}y_{ki} + x_{jk}x_{ki}\mu) \end{bmatrix} + \frac{d_{44}}{4A} \begin{bmatrix} (y_{jk}y_{ki} + x_{jk}x_{ki}) & \frac{2}{3}Ax_{jk} & \frac{2}{3}Ay_{jk} \\ \frac{2}{3}Ax_{ki} & \frac{1+\delta_{ij}}{2}A^2 & 0 \\ \frac{2}{3}Ay_{ki} & 0 & \frac{1+\delta_{ij}}{2}A^2 \end{bmatrix}} \cdots (8)$$

が得られる。ただし $x_{ij}=x_i-x_j$, $y_{ij}=y_i-y_j$, $A=$ 三角形要素の面積, $\delta_{ij}=$ クロネッカーのデルタ, $\mu=d_{33}/d_{11}$, $\nu=d_{12}/d_{11}=d_{21}/d_{11}$

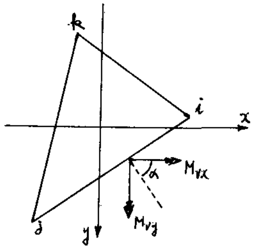
3. 応力を仮定するHibrid法[3]

この方法は, 要素内で応力, 周辺で変形を仮定し, 補足エネルギーの原理を用いて要素の剛性マトリックスを作ろうとするものである。要素内の応力を式(9)のように仮定すると, この応力によって辺 ij には式(10)の断

$$\begin{bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \\ S_x \\ S_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \cdots (9)$$

$$\begin{bmatrix} S_\nu \\ M_{\nu x} \\ M_{\nu y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & c & s \\ 0 & -s & -c & 0 & 0 \\ c & 0 & s & 0 & 0 \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_i & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_i \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} (1-t) + \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & x_j & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & y_j \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} t \right\} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \cdots \left(\text{ただし } c=\frac{y_j-y_i}{l},\ s=\frac{x_i-x_j}{l} \right) \cdots (10)$$

面力が現われる。また辺 ij の変形を式(11)のように仮定することにする。これらを簡単に $\sigma=\mathbb{P}\beta$, $f_{\nu ij}=\mathbb{R}_{ij}\beta$, $u_{ij}=\mathbb{L}_{ij}\mathbb{g}$ と書く事にすると, 要素の剛性マトリックスは $k=\mathbb{T}^T\mathbb{H}^{-1}\mathbb{T}$ で計算できる。ただし $\mathbb{H}\equiv\int\mathbb{P}^T\mathbb{D}\mathbb{P}\,dA$, $\mathbb{T}\equiv\sum\int\mathbb{R}_{ij}^T\mathbb{L}_{ij}\,dS$ (Σは三辺についての和) とおいた。$\mathbb{H}^{-1}$ および $\mathbb{T}\equiv[\mathbb{T}_1,\mathbb{T}_2,\mathbb{T}_3]$ を実際に計算した結果は, 式(12), (13)のようになる。ただし座標原点は要素の図心に取ってある。また I_x, I_y, I_{xy} はそれぞれ x, y 軸まわりの断面二次モーメントおよび相乗モーメント, $\begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}$ は $\begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}^{-1}$ の対応する要素, $\tilde{d}_{44}\equiv\left(\frac{I_y}{d_{11}A}+\frac{1}{d_{44}}\right)^{-1}$, $\tilde{d}_{55}\equiv\left(\frac{I_x}{d_{11}A}+\frac{1}{d_{44}}\right)$ である。式(12)の近似式は $d_{12}, d_{21} \ll d_{11}$ とおいて求めた。式(14)は k の内 i 節点と j 節点を結ぶ部分を取り出したものであり, 前節の式(8)に対応する。($\lambda=\tilde{d}_{55}/\tilde{d}_{44}$)



$$\begin{bmatrix} u \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1-t & \bar{c} & \bar{s} \\ 0 & 1-t & 0 \\ 0 & 0 & 1-t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} t & -\bar{c} & -\bar{s} \\ 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \cdots (11)$$

$$\left(\text{ただし } \bar{c}=\frac{l_{ij}}{2}\cos\alpha_{ij}\,t(1-t),\ \bar{s}=\frac{l_{ij}}{2}\sin\alpha_{ij}\,t(1-t) \right)$$

$$\mathbb{H}^{-1}=\frac{1}{A}\begin{bmatrix} \begin{matrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{matrix} & \\ & \begin{bmatrix} e_{11}\frac{I_y}{A}+e_{44} & e_{12}\frac{I_{xy}}{A} \\ e_{21}\frac{I_{xy}}{A} & e_{11}\frac{I_x}{A}+e_{44} \end{bmatrix}^{-1} \end{bmatrix} \doteqdot \begin{bmatrix} \begin{matrix} d_{11} & d_{12} & 0 \\ d_{21} & d_{22} & 0 \\ 0 & 0 & d_{33} \end{matrix} & \\ & \begin{matrix} \tilde{d}_{44} & 0 \\ 0 & \tilde{d}_{55} \end{matrix} \end{bmatrix} \cdots (12)$$

$$\mathbb{T}_i=\begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{y_{jk}}{2} \\ 0 & \frac{x_{jk}}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{y_{jk}}{2} & -\frac{x_{jk}}{2} \\ \frac{y_{jk}}{2} & -\frac{y_{jk}x_i}{4} & \left(\frac{y_{jk}x_i}{4}+\frac{A}{6}\right) \\ -\frac{x_{jk}}{2} & \left(\frac{x_{jk}y_i}{4}-\frac{A}{6}\right) & \frac{x_{jk}y_i}{4} \end{bmatrix} (13)$$

$$\boxed{k_{ij} \doteqdot \begin{bmatrix} \text{式(8)の} \\ \text{第一項} \end{bmatrix} + \frac{\tilde{d}_{44}}{4A}\left\{ \begin{bmatrix} 0 & \frac{A}{3}x_{jk}\lambda & \frac{A}{3}y_{jk} \\ \frac{A}{3}x_{ki}\lambda & \frac{A}{6}\left(\frac{2}{3}A-y_ix_{jk}-x_{ki}y_j\right)\lambda & -\frac{A}{6}(y_iy_{jk}-x_{ki}x_j\lambda) \\ \frac{A}{3}y_{ki} & -\frac{A}{6}(-x_ix_{jk}\lambda+y_{ki}y_j) & \frac{A}{6}\left(\frac{2}{3}A+x_iy_{jk}+y_{ki}x_j\right) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ -\frac{y_i}{2} \\ \frac{x_i}{2} \end{bmatrix}(y_{jk}y_{ki}+x_{jk}x_{ki}\lambda)\begin{bmatrix} 1 & -\frac{y_j}{2} & \frac{x_j}{2} \end{bmatrix} \right\}} \cdots\cdots (14)$$

4. 考察と新要素の提案

Zienkiewicz[1] や Clough[2] も指適しているように, 式(8)の要素は板厚が薄くなると精度が悪くなる。これは d_{11}, d_{44} がそれぞれ板厚の3乗および1乗に比例する量であり, 板厚が薄くなると第2項が大きくなりすぎるためである。式(14)では d_{44} の代りに $\tilde{d}_{44}$ が使われているが, これは定義式からも解るように板厚が薄くなっても大きくなる傾向はない。そこでアイソパラメトリック法でも d_{44} の代りに $\tilde{d}_{44}$, $\tilde{d}_{55}$ を用いることを提案する(物理的な理由づけも可能である)。また変形関数も式(6)を次の式(15)に変えたほうがよいように思われる。

$$\begin{bmatrix} w \\ \theta_x \\ \theta_y \end{bmatrix} = \sum_{j=1}^{n} \begin{bmatrix} g_j & \frac{g_j}{2}(-g_ky_{jk}+g_iy_{ij}) & \frac{g_j}{2}(g_kx_{jk}-g_ix_{ij}) \\ 0 & g_j & 0 \\ 0 & 0 & g_j \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_j \\ \theta_{xj} \\ \theta_{yj} \end{bmatrix} \cdots (15)$$

参考文献

(1) Zienkiewicz O.C. 外2, Int. J. for NME Vol3 P275/290 ('71)

(2) Pawsey S.F. & R.W. Clough, Int. J. for NME Vol3 P575/586 ('71)

(3) Cook R.D, Int. J. for NME Vol5 P277/288 ('72)