I-38　分布荷重による有限要素法　（第１報）

信州大学　正員　谷本勉之助
正員　夏目正太郎
○学生員　柄沢安衛

１、序文

本解析は $\nabla^4 w = \frac{q}{D}$ に支配される，平板の曲げたわみの，有限要素法について，剛化変形法を適用したものである．その要素は，形状を，任意な四角形とした．荷重は，基礎方程式の分布荷重 q をとりこんで，要素に一様に q が分布する荷重としてある．また部材座標系のとり方にも，少し工夫がほどこされてある．

また，力釣合は，各節点に集まっている要素の頂点の力量を集計したものである．その結果は，すでに線部材（梁）で見られるような，三軸連立方程式となる．

２、解析

四角形の要素は，頂点の自由度の合計が，変形量に関して，１２自由度になるので，曲げたわみ w は，部材座標系の座標 x，y に関する多項式として，１２項必要であり，１２個の未定定数からなる固有マトリックスを有する．また，荷重項も x と y の影響を受けるとする．以上のことから，部材座標系の状態ベクトルとして，一般変形量と一般力量が，次のようにとられる．

$$\mathbb{U} = \{ w \quad \theta_x \quad \theta_y \} = \mathbb{P}(x, y)\mathbb{X} + \mathbb{A}(x, y)\, q \tag{1}$$

$$\mathbb{V} = \{ M_x \ M_y \quad M_{xy} \quad Q_x \quad Q_y \} = \mathbb{Q}(x, y)\mathbb{X} + \mathbb{B}(x, y)\, q \tag{2}$$

ただし，$\mathbb{P}(x, y)$ は (3×12)，$\mathbb{Q}(x, y)$ は (5×12) のマトリックスであり，$\mathbb{X}$ は，１２個の未定定数からなる固有マトリックスである．$\mathbb{A}(x, y)$ は (1×3)，$\mathbb{B}(x, y)$ は (1×5) の荷重係数マトリックスである．よって固有マトリックスを消去して，力量と変形量の関係を求めることができる，

$$\begin{bmatrix} \mathbb{V}^1 \\ \mathbb{V}^2 \\ \mathbb{V}^3 \\ \mathbb{V}^4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{Q}^1 \\ \mathbb{Q}^2 \\ \mathbb{Q}^3 \\ \mathbb{Q}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}^1 \\ \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{P}^3 \\ \mathbb{P}^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{U}^1 \\ \mathbb{U}^2 \\ \mathbb{U}^3 \\ \mathbb{U}^4 \end{bmatrix} + \left[- \begin{bmatrix} \mathbb{Q}^1 \\ \mathbb{Q}^2 \\ \mathbb{Q}^3 \\ \mathbb{Q}^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{P}^1 \\ \mathbb{P}^2 \\ \mathbb{P}^3 \\ \mathbb{P}^4 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \mathbb{A}^1 \\ \mathbb{A}^2 \\ \mathbb{A}^3 \\ \mathbb{A}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbb{B}^1 \\ \mathbb{B}^2 \\ \mathbb{B}^3 \\ \mathbb{B}^4 \end{bmatrix} \right] q \,. \tag{3}$$

これが，変形法で必要な，変形量と力量の関係で，この式を利用して，力釣合から，変形量だけが未知量となっている連立方程式へもって行く式である．ただし，式（３）は，部材座標系の式であるから，全体座標系へ射影して，全体座標系の式にしてやらないと，力釣合には利用できない．そのために，部材座標系を全体座標系に射影する射影子を $\mathbb{R}^i$，また，その射影から得られた全体座標系の力量を $\mathbb{W}^i$ とすると，射影の式は，次のようになる．

$$\begin{aligned} \mathbb{W}^i &= \mathbb{R}^i \mathbb{V}^i \\ &= \begin{bmatrix} \lambda^1 & \mu^1 & \nu^1 & \theta^1 \\ \lambda^2 & \mu^2 & \nu^2 & \theta^2 \\ \lambda^3 & \mu^3 & \nu^3 & \theta^3 \\ \lambda^4 & \mu^4 & \nu^4 & \theta^4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbb{U}^1 \\ \mathbb{U}^2 \\ \mathbb{U}^3 \\ \mathbb{U}^4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \rho^1 \\ \rho^2 \\ \rho^3 \\ \rho^4 \end{bmatrix} q \,. \end{aligned} \tag{4}$$

よって，ある節点での，力釣合のとり方は，その節点に関係ある要素の式（4）のうちから，相当する力量$\mathbb{W}(\varpi)$をとって来て，集計してやると良い．

$$\Sigma \mathbb{W}^i + \mathbb{P} = 0. \tag{5}$$

従ってϖの指標について，系統的に，処理してやると，次の式となる，

$$\lfloor a' \ \ a \ \ a'' \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} \varpi_{s-1} \\ \varpi_s \\ \varpi_{s+1} \end{bmatrix}_{r-1} + \lfloor b' \ \ b \ \ b'' \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} \varpi_{s-1} \\ \varpi_s \\ \varpi_{s+1} \end{bmatrix}_{r} + \lfloor c' \ \ c \ \ c'' \rfloor_{rs} \begin{bmatrix} \varpi_{s-1} \\ \varpi_s \\ \varpi_{s+1} \end{bmatrix}_{r+1} + \mathbb{P}_{rs}' = 0. \tag{6}$$

上記の式(6)は，あるひとつの節点における釣合の方程式であるから番号sについて集積して，次の式を得る．

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_1'' & & \\ a_2' \ a_2 \ a_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & a_m' a_m \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \\ \cdots \\ \varpi_m \end{bmatrix}_{r-1} + \begin{bmatrix} b_1 \ b_1'' & & \\ b_2' \ b_2 \ b_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & b_m' b_m \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \\ \cdots \\ \varpi_m \end{bmatrix}_{r} + \begin{bmatrix} c_1 \ c_1'' & & \\ c_2' \ c_2 \ c_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & c_m' c_m \end{bmatrix}_r \begin{bmatrix} \varpi_1 \\ \varpi_2 \\ \cdots \\ \varpi_m \end{bmatrix}_{r+1} + \begin{bmatrix} \mathbb{P}_1 \\ \mathbb{P}_2 \\ \cdots \\ \mathbb{P}_m \end{bmatrix}_r = 0 \tag{7}$$

上記式（7）において，各係数マトリックスを次のようにおきかえる，

$$\begin{bmatrix} a_1 \ a_1'' & & \\ a_2' \ a_2 \ a_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & a_m' \ a_m \end{bmatrix}_r = \mathbb{A}_r \ , \quad \begin{bmatrix} b_1 \ b_1'' & & \\ b_2' \ b_2 \ b_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & b_m' \ b_m \end{bmatrix}_r = \mathbb{B}_r \ , \quad \begin{bmatrix} c_1 \ c_1'' & & \\ c_2' \ c_2 \ c_2'' & & \\ \cdots\cdots\cdots & & \\ & & c_m' \ c_m \end{bmatrix}_r = \mathbb{C}_r \ . \tag{8}$$

各，$\mathbb{A}$，$\mathbb{B}$，$\mathbb{C}$，を番号rについて集積し，所要の，最終三軸マトリックス式が得られる．

$$\begin{bmatrix} \mathbb{B}_1 & \mathbb{C}_1 & & & \\ \mathbb{A}_2 & \mathbb{B}_2 & \mathbb{C}_2 & & \\ & \mathbb{A}_3 & \mathbb{B}_3 & \mathbb{C}_3 & \\ & & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & \mathbb{A}_n & \mathbb{B}_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \{\varpi_1\} \\ \{\varpi_2\} \\ \{\varpi_3\} \\ \{\cdots\} \\ \{\varpi_n\} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \{\mathbb{P}_1\} \\ \{\mathbb{P}_2\} \\ \{\mathbb{P}_3\} \\ \{\cdots\} \\ \{\mathbb{P}_n\} \end{bmatrix} = 0 \ . \tag{9}$$

3．あとがき

本解析は，小型のマトリックスのインバース計算だけで，漸化が可能であるので，比較的，小さい，電子計算機でも解け，かつ，三軸マトリックスになっていることもあいまって，良い精度の解が期待される．

参考文献　第26回年次講演会講演概要集　I－143「有限要素法による板の面内応力解析」石川，谷本，夏目