I-37　有限要素法と差分法の等価性

川崎重工業(株)　正員　坂井藤一

1 まえがき

近年有限要素法は一般的な数値解析の手法として、差分法とともにその広範な応用性が注目されている。従来の定説では，差分法は純然たる数学的近似であり，有限要素法は変分原理によって物理的近似に基づいていると言われている。さらにまた、差分法は一般の微分方程式に適用可能であるが、有限要素法は変分原理に基づくため，適用範囲に制限のあるのが現状である.

1960年代後半からはOden等の努力あるいは応用数学者の参加によって数学的基盤が確立され始めたが，それとともにGalerkin法などのweighted residuals method[*)]も導入され，一般的な数値解析法として有限要素法の適用範囲が拡張しつつある。

筆者は，以上のような観点から先の報告[1)]において、

(1) 有限要素法と差分法の等価性に関する証明

(2) 非自己随伴方程式あるいは初期値問題などにおける有限要素法と差分法の関係に関する考察

の諸点を述べ，その結果として、一見相異なる根拠に立つ有限要素法と差分法は本質的には等価な関係にあることを示し，両者の概念を結合することにより一つの離散化手法(差分要素法 － FDEM)を提案した。これには幾つかの利点が認められるが，有限要素法における“compatibilityはどこまで緩められるか？”という問題への一つの答になっているものと思われる。また，有限要素法と差分法の等価性から，これらの体系化の可能性が予想される。本報告では以上のような点につき考察を行なった。

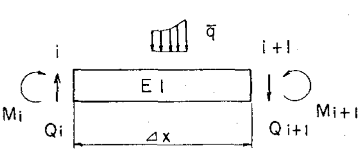
2 差分要素法の例 — 梁の曲げ問題(図－1)

基本方程式　$EI\dfrac{d^4w}{dx^4}=\bar{q}$，　差分方程式　$EI\dfrac{W_{i-2}-4W_{i-1}+6W_i-4W_{i+1}+W_{i+2}}{(\Delta X)^4}=\bar{q}_i$

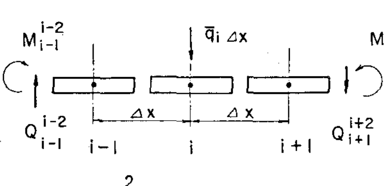
差分ポテンシャルエネルギーの最小条件から、差分要素法(変位法)における要素剛性マトリックス式は次のように得られる(図－2参照)。

$$\frac{EI}{(\Delta X)^3}\begin{bmatrix}1 & & sym.\\ -2 & 4 & \\ 1 & -2 & 1\end{bmatrix}\begin{Bmatrix}W_{i-1}\\ W_i\\ W_{i+1}\end{Bmatrix}=\begin{Bmatrix}-\frac{1}{2}Q_i^{i-1}-\frac{1}{\Delta X}M_i^{i-1}\\ \bar{q}_i\Delta X+\frac{1}{2}(Q_i^{i-1}-Q_i^{i+1})+\frac{1}{\Delta X}(M_i^{i-1}+M_i^{i+1})\\ \frac{1}{2}Q_i^{i+1}-\frac{1}{\Delta X}M_i^{i+1}\end{Bmatrix}$$

この要素の重ね合せの結果は上記の差分方程式を得る．また，力学的境界条件も差分の場合と一致する。



Figure－1 Beam Problem



Figure－2 Element for FDEM

*) Galerkin 有限要素法の最も初期の研究には奥村・坂井およびSzabo et. al. などがある。

3　発展系の偏微分方程式における有限要素法と差分法の関連性

(1)　放物型（熱伝導・拡散・圧密）

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

図-3(a)のような長方形要素に対し、時間・空間両方向に線形補間を考えると、次のような要素マトリックス式を得る（consistent　FEM）。

$$\left[\frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}+\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}u^{n}_{i+1}\\u^{n+1}_{i+1}\end{Bmatrix}+\left[\frac{k}{(\Delta x)^2}\begin{bmatrix}1&-1\\-1&1\end{bmatrix}-\frac{1}{\Delta t}\begin{bmatrix}\frac{2}{3}&\frac{1}{3}\\\frac{1}{3}&\frac{2}{3}\end{bmatrix}\right]\begin{Bmatrix}u^{n}_{i}\\u^{n+1}_{i+1}\end{Bmatrix}=0$$

これを空間的に重ね合せれば図-4(b)となる。また、差分要素法によれば、図-4(c)のCrank－Nicolson 差分と一致する。(b)と(c)の平均操作はGelfand－Lokutsieuski　差分となる。

(2)　双曲型（波動方程式）

$$\frac{\partial u}{\partial t}+c\frac{\partial u}{\partial x}=0\quad \text{又は}\quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=0$$

図-4(a)のような三角形要素に対し，面積座標 L_i の線形補間を行ない要素マトリックス式を導出すると，適当な重ね合せを考えることによって、(b)，(c)，(d)，(e)，(f)の各差分式を得ることができる。

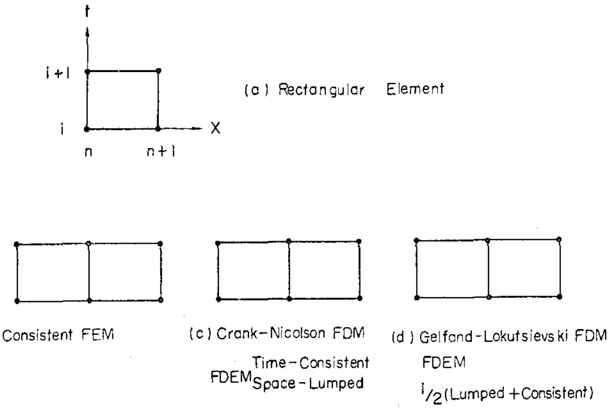


Figure-3　Elements for Non-Stationary Heat-Transfer Equation

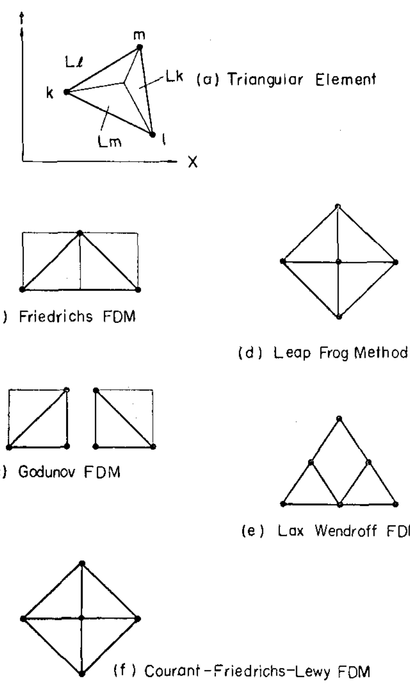


Figure-4　Elements for Wave Equation

4　離散化手法の体系に関する考察

以上から、従来の各種手法は系統的に位置づけられ、その概念も明確になると予想される。試みに、分類とそれぞれの特徴を示せば，次のようになる。

Discretization Technique
- Conventional Variational Method
- Finite Element Method
- Finite Difference Element Method
- Finite Difference Method
- Collocation Method

Physical Direct Approximation
Consistent Scheme
Lumped Scheme
Direct Approximation of differential Equations

Continuous Function
Smooth Function
Piece-wise Smooth Function
Step-wise Function
Delta Function

1)　坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察，JSSCマトリックス構造解析シンポジウム，1973-6