I-34　最小二乗変分原理に基づく有限要素法

川崎重工　東京設計事務所　正員　坂井藤一
正員　○河合三四郎

1　まえがき

従来有限要素法は主としてエネルギー原理にその基礎を置いて来たので、エネルギー原理の適用可能な物理現象あるいは広義のエネルギー汎関数の設定できる自己随伴方程式問題に適用が限られていた。最近に至り、Galerkin 法をはじめとするweighted residuals method が導入され、有限要素法の適用範囲が拡大しつつある。しかし、一般に weighted residuals method では，weighting function の採択が一義的でなく，その良否によって結果の精度に大きな影響がある。[1]

最小二乗変分原理が有限要素法の基礎として適用された例は、筆者の知る限り未だないようである。本報告は，誤差解析において利用される最小二乗法を，変分原理として有限要素法に適用することを意図したものである。[2] 筆者はすでに初期値問題（時間軸に対し有限要素法を適用）あるいは水表面波の波動解析[3]などに応用して、その有用性を確かめているが、ここではその特徴と応用問題について考察して見た。

2　最小二乗変分原理

次のような方程式を考えよう。

$$Au - f = 0$$

ここで，A： non-self-adjoint operator

次の汎関数Jを定義する。

$$J = \frac{1}{2}\int_a^b (Au - f)^2\, dx = \frac{1}{2}\| Au - f \|^2$$

これより、第一変分の結果として，

$$\delta J = \int_a^b A^* \left[Au - f \right] \delta u dx + 境界項$$

ここで、A^* ：Aのadjoint operator

したがって、JのEuler 方程式は次のようになる。

$$A^* \left[Au - f \right] = 0$$

また、第二変分を採り，原式が成立するとすれば、

$$\delta^2 J \quad \int_a^b \left[\delta(Au) \right]^2 dx > 0$$

したがって，正解に対してJは最小となる。

Euler方程式において，A^*Aは正値確定だから，次のエネルギー汎関数Iが定義される。すなわち，

$$I = \frac{1}{2}\left[(A^*Au, u) - 2(A^*f, u) \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\| Au - f \|^2 - \| f \|^2 \right]$$

したがって，汎関数Jは汎関数Iと常数項しかちがわない。一般に自己随伴方程式では，最小二乗法とエネルギー法は同一内容を有する。

原式の正解Uo および近似解Unとする。

$$u_n = \sum_{k=1}^{n} a_k \varphi_k$$

$$J_n = \frac{1}{2}\| A u_n - f \|^2$$

これより，係数a kは次の式から求められる。

$$\frac{\partial J_n}{\partial a_k} = 0 \qquad (k = 1, 2, \cdots\cdots, n)$$

誤差評価は次のように与えられる。

$$\| u_n - u_0 \| \leq K \| Au_n - f \|$$

ただし，
$$K \geq \frac{\| u \|}{\| Au \|}$$

特徴は以下の通り。

（1）誤差を最小にする。
（2）初期値問題・境界値問題などに関係しない。
（3）自己随伴・非自己随伴など形式に関係しない。
（4）汎関数の設定が容易である。
（5）汎関数は正値対称。
（6）自然条件は原式から派生する。

3　初期値問題への応用　　時間に関する数値積分

例題

$$\boxed{\begin{array}{ll} \dfrac{dy}{dt}+Z=0\ , & y(0)=1 \\ \dfrac{dZ}{dt}-y=0\ , & Z(0)=0 \end{array}}$$

厳密解 $\left\{\begin{array}{l} y = \cos t \\ Z = \sin t \end{array}\right.$

差分法

explicit $\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$,　implicit $\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{Bmatrix} \dfrac{1}{1+(\Delta t)^2} \begin{bmatrix} 1 & -\Delta t \\ \Delta t & 1 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$

有限要素法

Galerkin

$$\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{4}{9}(\Delta t)^2} \begin{bmatrix} 1-\frac{2}{9}(\Delta t)^2 & -\Delta t \\ \Delta t & 1-\frac{2}{9}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$$

最小二乗法

$$\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{Bmatrix} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}(\Delta t)^2} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{6}(\Delta t)^2 & -\Delta t \\ \Delta t & 1-\frac{1}{6}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$$

差分要素法

最小二乗法

$$\begin{Bmatrix} y_{i+1} \\ Z_{i+1} \end{Bmatrix} \frac{1}{1+\frac{1}{4}(\Delta t)^2} \begin{bmatrix} 1-\frac{1}{4}(\Delta t)^2 & -\Delta t \\ \Delta t & 1-\frac{1}{4}(\Delta t)^2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} y_i \\ Z_i \end{Bmatrix}$$

次の形に変換　$\dfrac{d^2y}{dy^2} + y = 0$,　$y(0)=1$,　$\dfrac{dy}{dt}(0)=0$

差分(central)　$y_{i+1} = \left\{2-(\Delta t)^2\right\} y_i - y_{i-1}$

有限要素法 (Hamilton原理)　$y_{i+1} = \dfrac{2-\frac{2}{3}(\Delta t)^2}{1+\frac{1}{6}(\Delta t)^2}\, y_i - y_{i-1}$

次表に数値結果の比較を示す。

表－1　各方法による数値結果の比較　($y = \cos t$)

method ＼ t		0.2	0.4	0.6	0.8	1.0	1.2	1.4	1.571	1.60
Exact		0.980	0.921	0.825	0.697	0.540	0.362	0.170	0.000	-0.029
FDM	explicit	1.000	0.960	0.880	0.762	0.608	0.424	0.216	0.023	-0.009
	implicit	0.962	0.888	0.783	0.652	0.501	0.336	0.165	0.018	-0.006
	central	1.000	0.960	0.882	0.768	0.623	0.453	0.266	0.071	0.068
FEM	Galerkin	0.974	0.910	0.811	0.681	0.526	0.352	0.167	0.005	-0.022
	least sq.	0.980	0.922	0.827	0.700	0.545	0.369	0.179	0.010	-0.019
	Hamilton	1.000	0.960	0.882	0.770	0.627	0.459	0.272	0.077	0.074
FDEM	least sq.	0.980	0.921	0.826	0.698	0.543	0.366	0.175	0.005	-0.023

1), 2) 坂井藤一：有限要素法に関する基礎的考察(オ1報・オ2報)　JSSCマトリックス構造解析
3) 坂井藤一・河合三四郎：有限要素法による表面波の数値解析　　シンポジウム, 1973-6