I-31 骨組構造物のもつ位相幾何学的特性に関する二、三の考察

京都大学工学部 正員 小西一郎
京都大学工学部 正員 白石成人
京都大学工学部 正員 ○谷口健男

1. まえがき

骨組系の剛性行列は一般に零要素が多いため疎であるが、節点番号を適当に付け換えることにより非零要素が行列の対角部に集まり、いわゆる帯行列となる。この帯行列の帯巾（band width）の大小は、特に小型、中型計算機を用いる場合、容量上重要な点であり、最適な節点番号付けは重要な問題である。

通常の高層ビル等の骨組系においては、同じパターンの繰り返しが多く、経験的にかなり帯巾のせまい剛性行列を組み立てることが可能であるが、構造形式によっては、たとえ、節点数、部材数が少くても、その最適番号付けが非常に困難となる場合がある。

本報告においては、骨組系は点と線よりなる、いわゆるグラフであるとの認識の上に立ち、グラフ理論の諸概念を用いて、骨組系の剛性行列における帯巾の問題に検討をくわえた。

2. 骨組とグラフ

グラフ（G）とは、点と線で画かれた図形のことであり、骨組の節点、部材は、Gの点、線にあたる。グラフにおいては部分に分れているグラフも許されるが、骨組ではそれらは別個に互に独立た取り扱いうるから、1つの骨組は1つの連結グラフであると考えられる。$G(n, m)$とは n点、m本の線よりなるグラフである。距離とは連結グラフ上の2点間を、たどるうちに通過する線の本数である。Gの直径 d_0とは、グラフ内の任意点より最遠点までの最短距離のうちの最大のもの、半径r_0とは、そのうちの最小のものをいう。点の次数とは、点に接続する線の本数のことである。よって、点の次数の総和 $= 2m$。 n, d_0, r_0の間において は

$$n \geqq 2r_0 \geqq d_0 \geqq r_0 \qquad (1)$$

完全グラフ（G_c）とは、全ての点が互に距離1にあるGをいう。よって、$G_c(n, m)$の線の総数S_mは

$$S_m = n \cdot (n-1) / 2 \qquad (2)$$

三角形は一番簡単な G_cの一つである。 補グラフ $\bar{G}$は、GとG_cを用いると、

$$\bar{G} = G_c - G \qquad (3)$$

3. 帯行列

$G(n, m)$において各点に適当に番号を付け節点接続行列 $A = [A_1, A_2, \cdots, A_i, \cdots, A_n]$を作ると、Gの剛性行列ともいうべき行列Kは、下式のように表わされる。

$$K = \begin{bmatrix} A_1^tA_1 & A_1^tA_2 & \cdots\cdots & A_1^tA_n \\ A_2^tA_1 & A_2^tA_2 & \cdots\cdots & A_2^tA_n \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ A_n^tA_1 & A_n^tA_2 & \cdots\cdots & A_n^tA_n \end{bmatrix}, \quad \begin{cases} \text{もし } i, j \text{ 間の距離} > 1 \text{ ならば } A_i^tA_j = 0 \\ \text{もし } i, j \text{ 間の距離} \leqq 1 \text{ ならば } A_i^tA_j \neq 0 \end{cases} \qquad (4)$$

(4)式の全要素 $\neq 0$ は Gが G_cであるときのみ成立し、他の場合、点番号を適当に付ければ、非零要素は、ある帯巾（band width ≡ b.w.）内に納まる。

3-1. 完全グラフおよびTreeグラフの帯巾

完全グラフG_cでは、b.w. $= n$となり、点番号の順序は、全く任意であり、b.w.は変化しない。G_cより1本線を取り去れば、n点中2点のみが次数$= \frac{n(n-1)}{2} - 1$、他は $n(n-1)/2$である。よって、この2点のうち一方に1、他方にnの番号を付ければ、b.w. $= n-1$となり、b.w.は一つ減少することがわかる。

n点グラフにおける最長距離は（$n-1$）である。いま$G(n)$の直径がd_0であるとすると、b.w.は距離$(n-1)$をd_0回で一端より他端に行きつかねばならないことより、最小帯巾の保障を得るから、

$$\mathrm{b.w.} \geqq \left[\frac{n-1}{d_0}\right] + 2 , \qquad [\ \ ]; ガウス記号 \tag{5}$$

b.w.=3の最小帯巾を与えるグラフとしては、直列のtreeグラフが考えられる。よって、任意G(n)において、(4),(5)両式より、そのb.w.に上，下限が次式のように与えられる。

$$n \geqq \mathrm{b.w.} \geqq \left[\frac{n-1}{d_0}\right] + 2 \tag{6}$$

3-2. 四角形を基本系としたグラフの帯巾

いま、n点グラフに平面的広がりをもたせるために、基本形として、4角形を考えると、節点数n，直径d_0，半径r_0，帯巾b.w.の関係は、表-1のように与えられる。これは、図-1のように、四角形を1，4，9，… と順次接続していったものであるが、接続してゆくに従って、図形は平面的に広がり、番号順序を決定する場合に考慮に入れねばならない点の数が順次多くなる。これを(5)式に付け加えると、図-1の図形の場合、それに最適番号順序を付した場合の最小帯巾は、次式のように与えられる。これは、表-1のb.w.の値と一致する。

$$n;偶数 \qquad \mathrm{b.w.} = \left[\frac{n-1}{d_0}\right] + \frac{d_0 - r_0}{2} + 2 \tag{7}$$

$$n;奇数 \qquad \mathrm{b.w.} = \left[\frac{n-1}{d_0}\right] + \frac{d_0 - r_0}{2} + 1 \tag{8}$$

すなわち、四角形のみよりなるグラフのb.w.は、点の数，直径，半径のみにより確定する。四角形が横方向に長く連らなっている場合は、それは、平面的広がりをもった一種のTreeと考えられ、よって、その基本系が、表-1，図-1のどの形に一致するかをみれば、b.w.は、その基本系により定まる。

3-3. 四角形グラフに一方向対角線が付加された場合の帯巾

例として四角形グラフ(n=9)を考える。これの最適番号順序は、図-2に示されるとおりであり、そのKを求めると、図-3のようになる。図-3をみるとわかるように、b.w.=4内に零要素がいくつか含まれているが、これは、図-2の破線で示される2点間の対応を意味する。すなわち、図-2のような番号順序を付せれば、ある一定方向への対角線がすでに考慮されたb.w.となっていることになり、b.w.の増加は生じないことがわかる。さらに、図-4のようなグラフのb.w.は、最長対角線距離を含む基本パターン、この例では、n=16点系(表-1，No.3)のb.w.が、その上限を示すことになる。

3-4. 四角形グラフに両方向対角線が付加されたグラフの帯巾

図-5のように3-3に示した例題に、さらに逆方向に対角線が入った場合、そのb.w.は元の系(実線)のb.w.に逆方向対角線(破線)のうちの最大距離を付加すればよい。すなわち、次式で求まる。

$$\mathrm{b.w.} \leqq (基本系の\ \mathrm{b.w.}) + (逆方向対角線の最大距離) \tag{9}$$

ただし、3-3，3-4の対角線は一列以内に留まっている場合のみを取り扱う。

4. あとがき

正方形を基本系として、グラフ理論の概念を用いて、最適節点番号順序のための目標である帯行列の巾について考察を行い、いくつかの基本パターンの場合の帯巾の上限を与える式を導いた。これらは、与えられたグラフより帯巾を限定したわけであるが、もし与えられたグラフが完全グラフに近い場合には、逆に補グラフより帯行列の巾を決定することが可能であり、かつ容易となる。

表-1

	n	d_0	r_0	b.w
1	4	2	2	3
2	9	4	2	4
3	16	6	4	5
4	25	8	4	6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

図-1

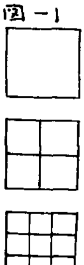

図-2

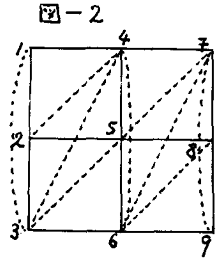

図-3

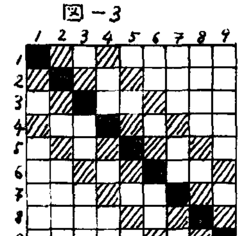

図-4

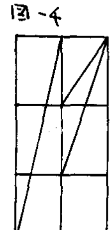

図-5