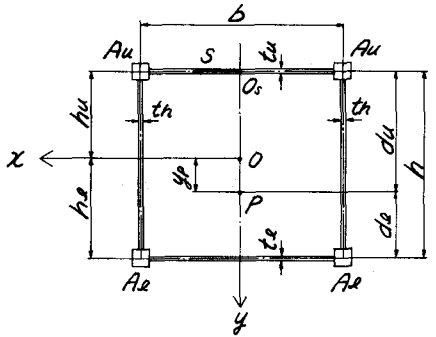


新日本技研(株) 正員 倉方慶夫  
 ○ 本四連絡橋公団 正員 藤井郁夫

1. まえがき 本四連絡橋の道路、鉄道併用橋では箱型トラス梁と吊橋の補剛けたや一般部トラス橋に用い、その中に鉄道を通す計画をしている。その場合対傾構を組むスペースが限定されるため、対傾構の機能と必要剛度に関する検討が不可欠となり、基本的な研究が進められているが、定性も把握する意味からも、大容量の計算が必ずしも容易でないことから、薄肉梁の解析手法を用いた解析解が有効となっている。しかし2,3の解法が提案されているので、それらの基本事項をここで対比しておくことにする。

2. 計算前提

- a). 主構の腹杖と上下横構はそれらの面内のせん断変形にだけ抵抗する板場(せん断場)に置換しうる。(以後、主構腹杖と横構を単に腹杖という。)
- b). 対傾構も同様にせん断場に置換しうるとするが、その間隔は支間に比べ細かく配置されているものとし、対傾構応力は梁軸方向に沿って分布する応力として取扱いうる。(ここでは断面の横断方向の変形に抵抗するように組まれた構造系を総称して対傾構という。)
- c). 断面は梁軸方向に一定で一軸対称矩形断面とする。即ち、両主構の相対する部材は同一とする。
- d). 弦杖間の距りは変化しない。
- e). 右手系座標(x, y, z)を用い、それぞれの方向の変位を(u, v, w)と表わす。



(図-1) 横断面と諸元の記号

3. 横断方向の変位の表示(以後の各解法に共通)

前提から

$$\epsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \epsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \sigma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 2\alpha(z), \frac{1}{2}(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}) = \varphi(z) \quad (1)$$

2α: 対傾構置換せん断場のせん断ひずみ。 φ: 断面の剛体的回転変位

$$\text{これより, } u = u_p + (\alpha - \varphi)(y - y_p), \quad v = v_p + (\alpha + \varphi)(x - x_p) \quad (2)$$

u<sub>p</sub>, v<sub>p</sub>; 点P(x<sub>p</sub>, y<sub>p</sub>)でのx, y方向の変位

腹杖中心線に沿う座標をs, s方向の変位をξとすると (図-2)

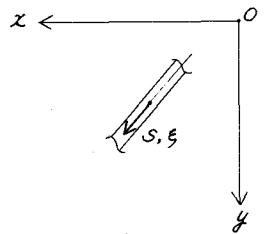
$$\xi = lu + mv = u_p l + v_p m + \varphi \rho_p + \alpha \rho_p^* \quad (3)$$

$$\text{ここに方向余弦, } l = \frac{\partial x}{\partial s}, \quad m = \frac{\partial y}{\partial s} \quad (4)$$

$$\rho_p = (x - x_p)m - (y - y_p)l, \quad \rho_p^* = (x - x_p)m + (y - y_p)l \quad (5)$$

4. 解法1、二次せん断流によるせん断変形を考慮したもの(その1; せん断中心による変位の表示)

弦杖応力と腹杖せん断流の釣合式 (図-3)



(図-2)

$$g_{i+1} - g_i = \left( \frac{dP_i}{dz} + P_{zi} \right) \text{ から}$$

$$g_i = g_i(z) - \sum_{k=1}^{i-1} \left( \frac{dP_k}{dz} + P_{zk} \right), \quad i \geq 2 \quad (6)$$

$P_i$ : 弦枚  $i$  の軸力,  $g_i$ : 腹枚  $i$  のせん断流,

$P_{zi}$ : 弦枚  $i$  の軸方向分布荷重,  $\delta_{sz} = g_i / Gt_i$ ,

$t_i$ : 腹枚換算板厚, より  $i = 1 \sim 4$  であるから  $\delta_{sz}$  は一般に次式で表わすことができる。

$$\delta_{sz} = \frac{g_0(z)}{Gt(z)} + l C_1(z) + m C_2(z) + p C_3(z) + p_p^* C_4(z) \quad (7)$$

$\delta_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z}$  と  $S$  について積分し、変位  $w$  の連続条件  $w(s) = w(s + \int ds)$  を用いると

$$\int p_p^* ds = 0 \text{ であるから } g_0 = -(C_3 - \varphi') \frac{\int p_p ds}{\int \frac{1}{G} \frac{ds}{t}} \quad (8)$$

$$\text{よって } w = C(z) + (C_1 - U_p')x + (C_2 - V_p')y + (C_3 - \varphi')\omega_p + (C_4 - \alpha')\omega_p^* \quad (9)$$

$$\omega_p = \int_0^s (p_p - \tilde{\tau}) ds, \quad \tilde{\tau} = \frac{2F}{\int \frac{ds}{t}} \frac{1}{t}, \quad F = bh, \quad \omega_p^* = \int_0^s p_p^* ds \quad (10)$$

ここで  $\omega_p^*$  は問題とする腹枚中心線上で、 $C, x, y, \omega_p$  に一次従属であることを利用して、

$\omega_p^* = k_1 + k_2 x + k_3 y + k_4 \omega_p$ ,  $k_i$ : const. と表わし、

$$\left. \begin{aligned} w_0(z) &= C + k_1(C_4 - \alpha'), & \psi_x(z) &= -\{C_1 + k_2(C_4 - \alpha') - U_p'\} \\ \psi_y(z) &= -\{C_2 + k_3(C_4 - \alpha') - V_p'\}, & \theta &= -\{C_3 + k_4(C_4 - \alpha') - \varphi'\} \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

とおくことにより、腹枚中心線上での  $z$  方向変位  $w$  は

$$w = w_0 - \psi_x x - \psi_y y - \theta \omega_p \quad (12)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \delta_{sz} = \frac{\partial w}{\partial s} + \frac{\partial \xi}{\partial z}, \quad \tau_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (13)$$

と表わし、次の仮想仕事の式;

$$\begin{aligned} & - \int_A \bar{\sigma}_z d\varepsilon_z dA - \int_{AS} \bar{\tau}_{sz} d\delta_{sz} dA_s - \int_F \bar{\tau}_{xy} d\tau_{xy} dF + \int_A \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\sigma}_z \cdot d\omega) dA + \int_{AS} \frac{\partial}{\partial z} (\bar{\tau}_{sz} \cdot d\xi) dA_s \\ & + \int_A \bar{P}_z d\omega dA + \int_{AS} \bar{P}_s d\xi dA_s = 0, \quad \text{に代入する。} \end{aligned} \quad (14)$$

$$\bar{\sigma}_z = E\varepsilon_z, \quad \bar{\tau}_{sz} = G\delta_{sz}, \quad \bar{\tau}_{xy} = G_p \tau_{xy}, \quad G_p: \text{対傾構置換せん断場のせん断弾性係数} \quad (15)$$

ここで、 $x, y$  座標を定め、 $S$  の原点および  $x_p, y_p$  を定めるのに次の条件;

$$\int_A x dA = 0, \quad \int_A y dA = 0, \quad \int_A x y dA = 0 \quad (16)$$

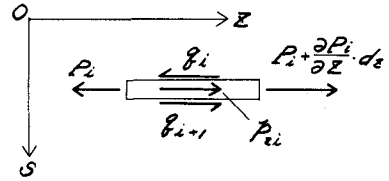
$$\int_A \omega_p dA = 0, \quad \int_A x \omega_p dA = 0, \quad \int_A y \omega_p dA = 0 \quad (17)$$

$$\text{を用いると、断面定数として、} \left. \begin{aligned} A &= \int_A dA, \quad I_x = \int_A y^2 dA, \quad I_y = \int_A x^2 dA, \quad I_{\omega} = \int_A \omega_p^2 dA \\ J_x &= \int_{AS} l^2 dA_s, \quad J_y = \int_{AS} m^2 dA_s, \quad J_s = \int_{AS} p_p \tilde{\tau} dA_s, \quad J_{\omega} = \int_{AS} p_p^2 dA_s, \quad J_{\omega}^* = \int_{AS} p_p^* dA_s \end{aligned} \right\} \quad (18)$$

$$J_{\omega}^* = \int_{AS} p_p p_p^* dA_s, \quad J_{x\omega} = \int_{AS} l p_p dA_s, \quad J_{y\omega} = \int_{AS} m p_p dA_s, \quad J_{x\omega}^* = \int_{AS} l p_p^* dA_s,$$

$$J_{y\omega}^* = \int_{AS} m p_p^* dA_s, \quad \text{ここに、} A_i: \text{弦枚断面積, } A_s: \text{腹枚断面積, } dA_s = t ds$$

$$\text{一軸対称断面であるので、} J_{x\omega} = J_{x\omega}^*, \quad J_{\omega} = J_{\omega}^*, \quad J_{y\omega} = J_{y\omega}^* = 0 \quad (19)$$



(図-3)

以上から次の釣合の基本微分方程式をうる。

$$\left. \begin{aligned} -EA\omega'' &= P_x, & -G\{J_x(U_p'' - \psi_y') + J_{x\omega}(\varphi'' + \alpha'' - \theta')\} &= P_x, & -GJ_x(V_p'' - \psi_x') &= P_y \\ EI_y\psi_y''' &= P_x + m_y', & EI_x\psi_x''' &= P_y + m_x', & -G\{J_{x\omega}(U_p'' - \psi_y') + J_{\omega\omega}(\varphi'' - \theta') + J_{\omega\omega}\alpha''\} &= m_T \\ EI\omega\theta'' - GJ_s\varphi'' &= m_T + m\omega', & -G\{J_{x\omega}(U_p'' - \psi_y') + J_{\omega\omega}(\varphi'' - \theta') + J_{\omega\omega}\alpha''\} + 4G_p Fd &= m_a \end{aligned} \right\} (20)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{ここに: } P_x &= \int_A \bar{p}_x dA, & m_x &= \int_A \bar{p}_x y dA, & m_y &= \int_A \bar{p}_x x dA, & m_\omega &= \int_A \bar{p}_x \omega_p dA \\ P_x &= \int_{A_s} \bar{p}_s l dA_s, & P_y &= \int_{A_s} \bar{p}_s m dA_s, & m_T &= \int_{A_s} \bar{p}_s \rho_p dA_s, & m_a &= \int_{A_s} \bar{p}_s \rho_p^* dA_s \end{aligned} \right\} (21)$$

5. 解法2; 二次せん断流によるせん断変形と断面変形を無視したもの。(一般そりねじり理論)

この場合には、(7)式において、 $C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = 0$ とし、さらに $\alpha = 0$ とすればよいから(11)式より

$$\left. \begin{aligned} \omega_0 &= C, & \psi_y &= U_p, & \psi_x &= V_p, & \theta &= \varphi' \text{ とし } \\ -EA\omega'' &= P_x, & EI_y U_p'' &= P_x + m_y', & EI_x V_p'' &= P_y + m_x' \\ EI\omega\varphi'' - GJ_s\varphi'' &= m + m\omega' \end{aligned} \right\} (22)$$

6. 解法3; 二次せん断流によるせん断変形を考慮したもの(その2; 変位関数による方法)

軸方向変位 $w$ を次式によって表わす。

$$w = \omega_0 - \psi_y x - \psi_x y - \theta \tilde{\omega}_p, \quad \tilde{\omega} = (x - x_d)(y - y_d) \quad (23)$$

以下、(13)~(16)式まで、解法1と同様に行うが、 $x_d, y_d$ を決めるのに次式を用い。

$$\int_A x \tilde{\omega}_p dA = 0, \quad \int_A y \tilde{\omega}_p dA = 0 \quad (\text{この結果、トラスでは } \int_A \tilde{\omega}_p = 0 \text{ とする}) \quad (24)$$

$x_p, y_p$ を決めるのに次の条件を用いる。

$$\int_{A_s} m \rho_p dA_s = 0, \quad \int_{A_s} l \rho_p dA_s = 0 \quad (25)$$

さらに、(18)、(19)、(21)式を用いて、 $E$ に $EA\omega_p$ の代りに $\tilde{\omega}_p$ を代入し。

$$I_{\tilde{\omega}} = \int_A \tilde{\omega}_p^2 dA, \quad m_{\tilde{\omega}} = \int_A \bar{p}_x \tilde{\omega}_p dA \quad (26)$$

と表わすと、釣合の基本微分方程式として、次式をうる。

$$\left. \begin{aligned} -EA\omega'' &= P_x, & -GJ_x(U_p'' - \psi_y' - y_p\theta') &= P_x, & -GJ_y(V_p'' - \psi_x') &= P_y \\ EI_y\psi_y''' &= P_x + m_y', & EI_x\psi_x''' &= P_y + m_x', & -G\{J_{\omega\omega}\varphi'' + J_{\omega\omega}(\alpha'' - \theta')\} &= m_T \\ EI\omega\theta'' + 4G_p Fd &= m_a - P_x y_p + m\omega', & -G\{J_{\omega\omega}\varphi'' + J_{\omega\omega}(\alpha'' - \theta')\} + 4G_p Fd &= m_a \end{aligned} \right\} (27)$$

7. あとがき. せん断中心 $x_p, y_p$ は(17)式から求まる。これに対し(25)式から求められる $x_p, y_p$ は、せん断中心ではない。解法3ではせん断中心を定義していないが、(26)式から $\varphi$ に関する微分方程式をつくると、その荷重項の中に、断面の回転を与えない $P_x, P_y$ の作用点という意味で、せん断中心を表わす量が含まれてくる。(10)式の $\omega_p$ はそり関数であり、 $I_{\omega}$ はそりねじり剛性(曲げねじり剛性)である。 $\tilde{\omega}_p$ はそり関数ではなく、 $I_{\tilde{\omega}}$ も一般にいわれるそりねじり剛性ではない。

参考文献 1). 土木学会 本四連絡橋上部構造研究小委員会 解析分科会資料; 小松、西村および岡村、倉方らによる、吊橋およびトラスのねじり解析資料。2). Bleich and Others; The Mathematical Theory of Vibration in Suspension Bridges. Department of Commerce, Bureau of Public Road (1950). 3). Kollbrunner und Hajdin; Dünnwandige Stäbe, Springer-Verlag (1972). 等