

京都大学工学部 正 丹羽 義次
 " 正 小林 昭一
 " 正 〇田村 武

はじめに

われわれが取り扱う固体材料，とりわけ弾性体に関してはずでに整った数理理論が完成されている。その基底には連続体の仮定が設けられており数学的処理が極めてスムーズに実行される。しかし、実際の境界値、初期値問題を純数学的に追求することは一般に不可能であって、その近似解法として級数展開、差分法、有限要素法等が広く用いられている。とくに有限要素法は物理的近似にその特徴がありその応用は各方面にわたっている。そこで同じ物理的近似のひとつとして非連続的なモデルを考えることも可能ではないかという観点に立ち、著者は"格子構造モデル"を研究した。格子構造自体は別な観点から多くの研究者によって考えられてきたものである。たとえば、M. Sokolowski は Couple Stress Theory の説明に、A. Askar, A. Cakmak は Micropolar Theory の説明に、また、Z. Bazant, M. Christensen は 層構造物の変形解析の近似解法に等、その理論を活用している。ここでは、格子構造の方程式を種々の弾性材料モデルのものより統一的に比較検討しその結果の一部を報告する。

格子構造

最も単純なモデル(モデルI)として図-1に示すごとく、異なる材料をたて、よこの格子におきかえる。このとき図-2の変位に対して断面力は次式で与えられる。

$$N_x = P (U_{m,n+1} - U_{m,n})$$

$$Q_x = Q (V_{m+1,n} - V_{m,n}) - R (\phi_{m+1,n} + \phi_{m,n})$$

$$M_x = R (V_{m+1,n} - V_{m,n}) - T (\phi_{m+1,n} + 2\phi_{m,n})$$

ここに、 $P = EA/l$, $Q = 12EI/l$, $R = 6EI/l$, $T = 2EI/l$.
 E : ヤング率, A : 断面積, I : 2次モーメント, l : スパン長である。これを用いて格子要素に対して、つり合い方程式を作ると次のようになる。

$$P(U_{m+1,n} - 2U_{m,n} + U_{m-1,n}) + Q(U_{m,n+1} - 2U_{m,n} + U_{m,n-1}) + R(\phi_{m,n+1} - \phi_{m,n-1}) = 0$$

$$P(V_{m,n+1} - 2V_{m,n} + V_{m,n-1}) + Q(V_{m+1,n} - 2V_{m,n} + V_{m-1,n}) - R(\phi_{m+1,n} - \phi_{m-1,n}) = 0$$

$$R(-U_{m,n+1} + U_{m,n-1} + V_{m+1,n} - V_{m-1,n}) - T(\phi_{m+1,n} + \phi_{m-1,n} + \phi_{m,n+1} + \phi_{m,n-1} + 8\phi_{m,n}) = 0$$

これは差分表示とも見られ、材料定数に注意して微分方程式に直すことができる。すなわち、

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k^2 \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

$$k^2 \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} - k^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0 \tag{2}$$

$$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{l^2}{12} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} \right) \tag{3}$$

ここに $k = b/l$ (b は断面の高さ)。同様に部材断面力を応力に変換して次式を得る。

$$\sigma_x = kE \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \sigma_y = kE \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \tau_{xy} = k^3 E \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \phi \right), \quad \tau_{yx} = k^3 E \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \phi \right)$$

$$m_x = k^3 E \frac{l^2}{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \quad m_y = k^3 E \frac{l^2}{12} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}$$

格子モデルIと Couple-Stress Theory

R. Mindlin 等による Couple-Stress Theory は従来の直、せん断応力に加えて偶応力をも含めたモデルで

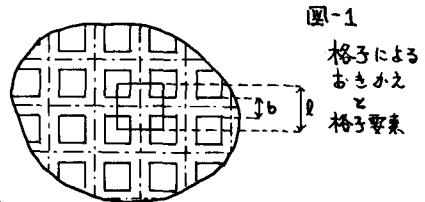


図-1

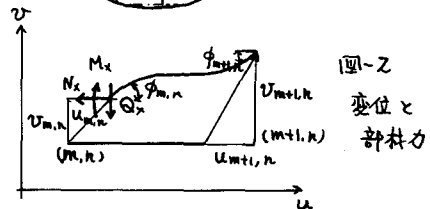


図-2

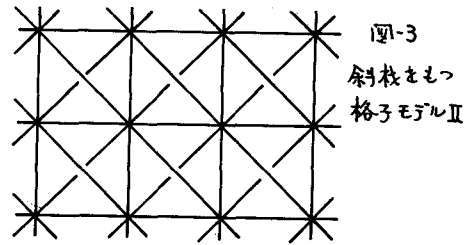
あり、モーメント効果をもつ格子モデルとも相似していることになる。実際に両者を比較してみる。

格子モデル I	Couple-Stress Theory
$k^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + (2-k^2) \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial c}{\partial x} - \frac{k^2 l^2}{6} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (4)	$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial c}{\partial x} - 2l_c^2 \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (5)
$(2-k^2) \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + k^2 \frac{\partial c}{\partial y} + \frac{k^2 l^2}{6} \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ (6)	$\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{1}{1-\nu} \frac{\partial c}{\partial y} + 2l_c^2 \nabla^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ (7)
$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{l^2}{12} \nabla^2 \phi$ (8)	$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$ (9)
$m_x = \frac{E l^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad m_y = \frac{E l^2}{12} \frac{\partial \phi}{\partial y}$	$m_x = 4B \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad m_y = 4B \frac{\partial \phi}{\partial y}$

ここで、(4)、(6)式は(3)式を(1)、(2)式に代入したものである。また(5)、(7)式の l_c は $\sqrt{6}l$ で与えられる長さの次元をもつ物理定数である。上表で $k=1, \nu=0$ の l を充分小さいとすれば両者は形の上で一致することがわかり、未だ実証されていないが、以上の比較により $l_c = \frac{\sqrt{3}}{2} l$ となり、 l_c が物質の最小の element の order であることが傍証される。

格子モデル II と Micro-polar Theory

従来の弾性学や上記の Couple-Stress Theory では式(9)のように回転角 ϕ は変位 u, v に対して従属しているが、格子モデルでは ϕ は独立である。そこで、そのような条件をもつ C. Eringen 等の Micropolar-Theory と格子モデルを比較するのであるが、そのために図-3 で示すような、より一般的モデル II を作る。式の誘導その他はモデル I と全く同様にして行われる。



格子モデル II	Micro-Polar Theory
$(1-k^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (1+2k^2) \nabla^2 u + k^2 \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (10)	$(\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\mu+k) \nabla^2 u + k \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$ (11)
$(1-k^2) \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (1+2k^2) \nabla^2 v - k^2 \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ (12)	$(\lambda+\mu) \frac{\partial}{\partial y} \left(2 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right) + (\mu+k) \nabla^2 v - k \frac{\partial \phi}{\partial x} = 0$ (13)
$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) - \frac{l^2}{18} \nabla^2 \phi$ (14)	$\phi = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\gamma}{k} \nabla^2 \phi$ (15)
$m_x = \frac{E l^2}{6} \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad m_y = \frac{E l^2}{6} \frac{\partial \phi}{\partial y}$	$m_x = \mu \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad m_y = \mu \frac{\partial \phi}{\partial y}$

ここに、 λ, μ, k, γ は弾性定数である。両者は形の上で酷似しているが(14)、(15)式で $\nabla^2 \phi$ の符号が異なることは注目される。

格子モデル III と弾性学

以上のモデル I, II では Poisson 比の考慮がなされているが、格子材料の Poisson 比を ν とし、構造全体の Poisson 比を導入したモデル III を考え、従来の弾性体と比較してみる。

格子モデル III	弾性体
$\sigma_x = \frac{kE}{1-k^2\nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + k\nu \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{kE}{1-k^2\nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + k\nu \frac{\partial u}{\partial x} \right)$	$\sigma_x = \frac{E_e}{1-\nu_e} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu_e \frac{\partial v}{\partial y} \right), \quad \sigma_y = \frac{E_e}{1-\nu_e} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu_e \frac{\partial u}{\partial x} \right)$
$\tau_{xy} = k^2 E \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \tau_{yx} = k^2 E \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right)$	$\tau_{xy} = \tau_{yx} = 2G_e \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right)$

$l \rightarrow 0$ としてやると上表より $kE \leftrightarrow E_e, k\nu \leftrightarrow \nu_e, k^2 E \leftrightarrow 2G_e$ の対応があるが $G_e = E_e / (2(1+\nu_e))$ の関係を格子モデルに適用してやると $\nu k^3 + k^2 - 1 = 0$ なる条件がでてくる。これを満足するとき形の上でモデル III と弾性体は全く一致してしまい、 $0 < \nu < 1/2$ のもとで $1.0 > k > 0.834$ なることがわかる。

(参考文献) R. Mindlin "Influence of Couple-Stresses On Stress Concentrations" 1962. C. Eringen "Theory of Micropolar Elasticity" 1964. M. Sobolowski "On Certain Two-Dimensional Applications of the Couple Stress Theory" 1968 年。