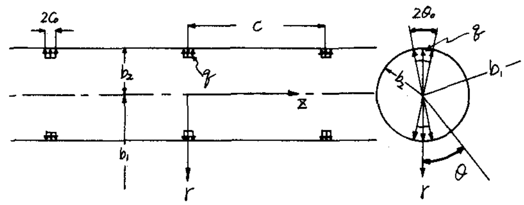
I－22　無限体中の円孔に部分分布力が作用するときの3次元応力解析について

北海道大学　正員　能町純雄
室蘭工業大学　同　○松岡健一

1. まえがき　無限体中の円孔に部分分布荷重が作用する場合の変位および応力の分布は，半無限体表面に分布荷重が作用する場合とかなり異なるものと思われる。本論では，先に発表した[1)2)]有限フーリェ・ハンケル変換による非軸対称3次元応力解法を用いて，無限弾性体中の無限長円孔に部分分布荷重が，等間隔に作用する場合の解析を行なうものである。

2. 変位の一般式　有限フーリェ・ハンケル変換によってえられる，円筒の非軸対称3次元応力解析の一般式は既に求めたが[2)]，本論のように，無限長円孔に荷重が等間隔に作用する場合（図－1）は，$z=0$ および $z=c$ で，$w=\tau_{z\theta}=\tau_{zr}=0$ となるので，この場合の変位の一般式は，座標軸を，円孔中心に z，半径方向に r，円周方向に θ 軸とし，それぞれの変位を w，u，v また，応力を σ_r，σ_z，σ_θ，$\tau_{r\theta}$，$\tau_{\theta z}$，τ_{zr} とすれば，



図－1

$$u=\frac{2}{\pi c}\sum_{k=1}^{2}\Bigl(\frac{1}{4}\Bigl\{\frac{1}{2\mu+\lambda}\beta_{00k}+\frac{2\mu}{2\mu+\lambda}A_{00k}\Bigr\}f_1^{(k)}+\frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nz\Bigl[\frac{1}{\mu N}\Bigl\{\chi_1^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}\omega_1^{(k)}\Bigr\}\beta_{0nk}+\frac{1}{N}\Bigl\{2\chi_1^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\omega_1^{(k)}\Bigr\}$$

$$\times A_{0nk}+\Bigl\{\chi_1^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\omega_1^{(k)}\Bigr\}E_{0nk}\Bigr]+\frac{1}{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu\theta\Bigl[C_{1\nu}\frac{1}{r^{\nu+1}}+C_{2\nu}r^{\nu-1}+\frac{1}{2\mu}\{f_{\nu+1}^{(k)}-f_{\nu-1}^{(k)}\}\alpha_{\nu0k}+\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}\{f_{\nu+1}^{(k)}$$

$$+f_{\nu-1}^{(k)}\}\beta_{\nu0k}+(\nu+1)\Bigl\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu+1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu-1}^{(k)}\Bigr\}A_{\nu0k}+(\nu-1)\Bigl\{\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu+1}^{(k)}-\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu-1}^{(k)}\Bigr\}B_{\nu0k}\Bigr]$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\cos\nu\theta\cdot\cos Nz\Bigl[-\frac{1}{\mu N}\frac{\nu}{Nr}G_\nu^{(k)}\alpha_{\nu nk}+\frac{1}{2\mu N}\Bigl\{\chi_{\nu+1}^{(k)}+\chi_{\nu-1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}+\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}\beta_{\nu nk}+\frac{\nu+1}{N}\Bigl\{2\chi_{\nu+1}^{(k)}$$

$$-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}+\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}A_{\nu nk}-\frac{\nu-1}{N}\Bigl\{2\chi_{\nu-1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}+\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}B_{\nu nk}+\frac{1}{2}\Bigl\{\chi_{\nu+1}^{(k)}+\chi_{\nu-1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\omega_{\nu+1}^{(k)}+\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}E_{\nu nk}\Bigr]\Bigr)\quad\cdots\cdots(1)$$

$$v=\frac{2}{\pi c}\sum_{k=1}^{2}\sum_{\nu=1}^{\infty}\sin\nu\theta\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl[C_{1\nu}\frac{1}{r^{\nu+1}}-C_{2\nu}r^{\nu-1}+\frac{1}{2\mu}(f_{\nu+1}^{(k)}+f_{\nu-1}^{(k)})\alpha_{\nu0k}+\frac{1}{2(2\mu+\lambda)}(f_{\nu+1}^{(k)}-f_{\nu-1}^{(k)})\beta_{\nu0k}$$

$$+(\nu+1)\Bigl\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu+1}^{(k)}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu-1}^{(k)}\Bigr\}A_{\nu0k}+(\nu-1)\Bigl\{\frac{3\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu-1}^{(k)}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}f_{\nu+1}^{(k)}\Bigr\}B_{\nu0k}\Bigr]$$

$$+\sum_{n=1}^{\infty}\cos Nz\Bigl[\frac{1}{2\mu N}\{\chi_{\nu+1}^{(k)}+\chi_{\nu-1}^{(k)}\}\alpha_{\nu nk}+\frac{1}{2\mu N}\Bigl\{\chi_{\nu+1}^{(k)}-\chi_{\nu-1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}-\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}\beta_{\nu nk}+\frac{\nu+1}{N}\Bigl\{2\chi_{\nu+1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}$$

$$-\omega_{\nu-1}^{(k)}\Bigr\}A_{\nu nk}+\frac{\nu-1}{N}\Bigl\{2\chi_{\nu-1}^{(k)}+\frac{\mu+\lambda}{2(2\mu+\lambda)}(\omega_{\nu+1}^{(k)}-\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}B_{\nu nk}+\frac{1}{2}\Bigl\{\chi_{\nu+1}^{(k)}-\chi_{\nu-1}^{(k)}-\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}(\omega_{\nu+1}^{(k)}-\omega_{\nu-1}^{(k)})\Bigr\}E_{\nu nk}\Bigr]\Bigr)\quad\cdots\cdots(2)$$

$$w=\frac{2}{\pi c}\sum_{k=1}^{2}\sum_{n=1}^{\infty}\Bigl(\frac{1}{2}\Bigl[\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Bigl\{\frac{1}{2\mu}\beta_{0nk}+A_{0nk}\Bigr\}\frac{1}{N}F_0^{(k)}+\Bigl\{G_0^{(k)}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_0^{(k)}\Bigr\}E_{0nk}\Bigr]$$

$$+\sum_{\nu=1}^{\infty}\cos\nu\theta\Bigl[\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}\Bigl\{\frac{1}{2\mu}\beta_{\nu nk}+(\nu+1)A_{\nu nk}-(\nu-1)B_{\nu nk}\Bigr\}\frac{1}{N}F_\nu^{(k)}+\Bigl\{G_\nu^{(k)}+\frac{\mu+\lambda}{2\mu+\lambda}F_\nu^{(k)}\Bigr\}E_{\nu nk}\Bigr]\Bigr)\quad\cdots\cdots(3)$$

上式中，μ，λ は Lamé の弾性定数，$N=n\pi/c$，$n=1,2,\cdots$　$\nu=1,2,\cdots$　であり，円筒の外径を b_1，

内径を b_2 とすれば，

$$g_\nu^{(k)}=a_1\left\{\left(\frac{r}{b_{k-1}}\right)^\nu-\left(\frac{b_{k-1}}{r}\right)^\nu\right\},\quad f_{\nu+1}^{(k)}=a_1 r\left\{\frac{1}{2(\nu+1)}\left(\frac{r}{b_{k-1}}\right)^\nu-\frac{1}{2}\left(\frac{b_{k-1}}{r}\right)^\nu\right\}+2\nu(b_1b_2)^\nu a_1^2\left\{\frac{b_2^2-b_1^2}{4(\nu+1)}\frac{1}{b_{k-1}^\nu}+\frac{b_{k-1}^\nu}{4(\nu-1)}\left(\frac{1}{b_2^{2(\nu-1)}}-\frac{1}{b_1^{2(\nu-1)}}\right)\right\},$$

$$f_{\nu-1}^{(k)}=a_1 r\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{r}{b_{k-1}}\right)^\nu+\frac{1}{2(\nu-1)}\left(\frac{b_{k-1}}{r}\right)^\nu\right\}+2\nu(b_1b_2)^\nu a_1^2\left\{\frac{b_2^{2(\nu+1)}-b_1^{2(\nu+1)}}{4(\nu+1)}\cdot\frac{1}{b_{k-1}^\nu}+\frac{b_2^2-b_1^2}{4(\nu-1)}b_{k-1}^\nu\right\},\quad a_1=\frac{b_1^\nu b_2^\nu}{b_1^{2\nu}-a_1^{2\nu}},$$

$$G_\nu^{(k)}=\frac{R_\nu^{(k)}(Nr)}{R_\nu^{(k)}(Nb_k)},\quad \chi_{\nu+1}^{(k)}=\frac{R_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nr)}{R_\nu^{(k)}(Nb_k)},\quad \chi_{\nu-1}^{(k)}=\frac{R_{\nu-1,\nu}^{(k)}(Nr)}{R_\nu^{(k)}(Nb_k)},\quad R_\nu^{(k)}(Nr)=I_\nu(Nr)K_\nu(Nb_{k-1})-I_\nu(Nb_{k-1})K_\nu(Nr),$$

$$F_\nu^{(k)}=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nr)\}-R_\nu^{(k)}(Nr)\{b_kR_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nb_k)-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nb_k)\}\right],$$

$$\omega_{\nu+1}^{(k)}=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_\nu^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu+1}^{(k)}(Nr)\}-R_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nr)\{b_kR_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nb_k)-b_{k-1}R_{\nu,\nu+1}^{(k)}(Nb_k)\}\right],$$

$$\omega_{\nu-1}^{(k)}=\frac{N}{\{R_\nu^{(k)}(Nb_k)\}^2}\left[R_\nu^{(k)}(Nb_k)\{rR_\nu^{(k)}(Nr)-b_{k-1}R_{\nu-1}^{(k)}(Nr)\}-R_{\nu-1,\nu}^{(k)}(Nr)\{b_kR_{\nu+1,\nu}^{(k)}(Nb_k)-b_{k-1}R_{\nu,\nu-1}^{(k)}(Nb_k)\}\right],$$

$$R_{ij}^{(k)}(Nr)=I_i(Nr)K_j(Nb_{k-1})+I_j(Nb_{k-1})K_i(Nr),$$ ただし $i\neq j$　$I(Nr)$, $K(Nr)$ は変形 Bessel 関数である。

また，$\alpha_{\nu nk}$, $\beta_{\nu nk}$, $A_{\nu nk}$, $B_{\nu nk}$, $E_{\nu nk}$ は，境界の物理量で与えられる積分定数で，境界条件を満足するように決定される。

3. 境界条件

2.で述べたように，$z=0$ および $z=c$ での境界条件は，すでに満足している。$r=b_1$，b_2 における境界は，b_1 を有限なものとして，図-1 は参照して．

$r=b_1$;　$u=v=w=0$,　$\therefore A_{\nu n1}=B_{\nu n1}=E_{\nu n1}=0$,

$r=b_2$;　$\tau_{r\theta}=0$,　$\therefore \alpha_{\nu n2}=0$

$\sigma_r=p(z,\theta)$,　$\therefore \beta_{\nu n2}=\int_0^c\int_0^{2\pi}p(z,\theta)\cos\nu\theta\cos Nz\,d\theta dz$,

$\tau_{rz}=0$　$\cdots\cdots$ (4)

また，式の誘導の仮定により．

$$\int_0^{2\pi}u)_{r=b_k}\cos\nu\theta\,d\theta=\frac{2}{c}\sum_n(A_{\nu nk}+B_{\nu nk})b_k\cos Nz\quad\cdots\cdots(5)$$

$$\int_0^{2\pi}v)_{r=b_k}\sin\nu\theta\,d\theta=\frac{2}{c}\sum_n(A_{\nu nk}-B_{\nu nk})b_k\cos Nz\quad\cdots\cdots(6)$$

従ってこの場合，未知係数は，$\alpha_{\nu n1}$, $\beta_{\nu n1}$, $A_{\nu n2}$, $B_{\nu n2}$, $E_{\nu n2}$ となり，(4) と (5), (6) 各2式からこれを決定する。

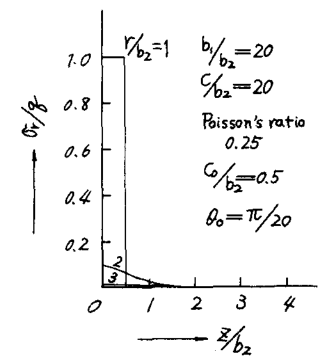


図-2. $\theta=0$ における σ_r の分布

4. 数値計算

以上により計算した，数値計算結果を右に示す。計算に使用した数値は図に示したとうりであり．この結果は，ν, n とも偶数項のみ，$n=20$ 項，$\nu=5$ 項の結果であり，まだ十分正しい結果ではない。詳しくは，当日発表する。

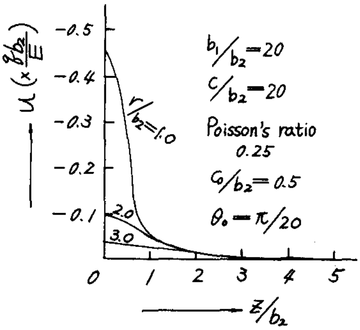


図-3. $\theta=0$ における u の分布

参考文献

1) S. G. Nomachi : On One Method of Solving Stress Problems in Cylindrical Co-ordinates by Means of Finite Fourier Hankel Transforms (Part I, II), Mem. of Muroran Institute of Tech., Vol. 3, No. 3, No. 4 (1960, 1961)

2) 能町．松岡 : 円筒座標に関する非軸対称三次元応力解析について，第27回全口大会 (1972)

3) E. Tremmel : Ausweitung des kreiszylindrischen Hohlraumes unter örtlichem Innendruck. Ingenieur-Archiv, Band 29 (1960)