

大阪工業大学

正員 ○岡村宏一

東洋技研コンサルタント

正員 島田 功

1. まえがき: 筆者はすでに、弾塑性、あるいは異種部材を内蔵するような不均質性をもつ3次元体の1数値解法を発表した。<sup>1)</sup>この解法は本質的に弾塑性、あるいは不均質弾性を含む3次元問題の基礎微分方程式の解法であり、この点、3次元体内に節点を設けた近似モデルを扱う有限要素法とは、その出発点を異にしている。また本解法は弾性問題の厳密解である Mindlin 解の線形化した重ね合わせによる連続解を基底に置いており、このような解法の性格に基づくものとして、3次元体内の未知量の制約や、Integral Methodに属する境界調整の方法を含め、高精度の解が期待できるなどの特徴を併せており、また級数解法に見られるような適用範囲の著しい制限を解除し、代数次数である Mindlin 解の多面的な応用によって解式の系統立てがなされている。本文は、この解法を引張限界を持つ3次元体が、内蔵された異種材料の挙動によってひびわれを生ずる場合に、その3次元解法を行なえるように発展させたものである。なお、その一部は、文献2)で発表した後、得られたデータを加えて報告する。

2. 解法: 図-1に示す直交座標系 $x-y-z$ に対応した応力成分を $\{\sigma\}$ とし、これらと傾斜した任意の直交座標系 $x'-y'-z'$ を考え、この軸に対応する応力成分を $\{\sigma'\}$ とすると、これらの間には次の関係がある。

$$\{\sigma'\} = [L] \{\sigma\} \quad (1)$$

ひずみ成分 $\{E\}$ 、および $\{E'\}$ についても同様に

$$\{E'\} = [K] \{E\} \quad (2)$$

ただし、 $[L]$ 、 $[K]$ 、は座標変換マトリックス

さて、引張限界応力に達すると亀裂が発生するような非線形な状態の解法として、まず、長年方程式の奥根として与えられる、主応力 $\hat{\sigma}_i$  ( $i=1,2,3$ )を求め、その中の1つが引張限界 $\hat{\sigma}_x$ に達したとし、その方向を前述の $x$ 方向とすると、その方向の $\hat{\sigma}_x'$ 、および $\hat{\sigma}_y'$ 、 $\hat{\sigma}_z'$ に抵抗しえないひびわれの生じた材料に変化する。ただし亀裂が用いられる材料は回復するものとする。そのような非線形モデルとして、任意の $\{E'\}$ に対し上記3つの応力成分が0となるように $\{\sigma'\} = [D'] \{E'\}$ で表わされる応力-ひずみマトリックスを変換する。(ある行、および列の弾性係数を0とする。) このような変換を行ない、式(1)、(2)を用いて変形すると

$$\{\sigma\} = [L]^{-1} [D'] [K] \{E\} = [D] \{E\} \quad (3)$$

これは、亀裂により母体の一部が異なる種の異方性になるものと仮定した、応力-ひずみ関係を $x-y-z$ 座標に対応して定めたものである。異種材料の部分についても母体と異なった $[D]$ を持つ状態であり、以下同様の基礎式となる。さて一般に3次元問題において解の見出されている基本的なCaseは等方弾性体の場合で、その応力-ひずみマトリックスを $[D_0]$ とする。両者の偏差は、亀裂の状態および異種材料によって異なるが、これを一般に $[4D]$ とすれば、式(3)は、次のようになる。

$$\{\sigma\} = [4D] \{E\} + [D_0] \{E\} \quad (4)$$

1) 岡村、島田: 弾塑性もしくは不均質弾性を有する3次元体の1数値解法、土木学会論文報告集 No.212.(1973)

2) 岡村、島田: 引張限界を有する不均質3次元体の1数値解法、土木学会関西支部講演要覧 (28.6)

そこで、亀裂、および不均質性を有する部分を支配する周知のつり合い式は、

$$\left. \begin{aligned} (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 u &= \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial z} \quad (= -X) \\ (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y \partial z} \right) + G_0 \nabla^2 v &= \frac{\partial \tau_{xy}^*}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y^*}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial z} \quad (= -Y) \\ (\lambda_0 + G_0) \left( \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 v}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right) + G_0 \nabla^2 w &= \frac{\partial \tau_{xz}^*}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}^*}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z} \quad (= -Z) \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

また、 $\{\sigma^*\} = [\Delta D] \{\varepsilon\}$  (6)

そこで、式(5)の右辺は、 $[\Delta D]$ に從属する項で、体積力に相当する。

さて、上記の基本となる解は、すでに筆者が用いてきた Mindlin 解である。ここで弾性体内の亀裂また、不均質性による剛性の変化によって、ある点 $k$ で考慮されるべき物理量 $X_k, Y_k, Z_k$ は、その点を中心とする比較的小さい有限の容積 $(V_k(\Delta x \Delta y \Delta z))$ 内では、均一な分布を持つものを見なし、これらの弾性母体(ひびわれを生じない均質弾性体)の場合からの偏倚量を、すでに文献(1)で述べたのと同様の手法によって解析する。

3. 逐次計算の方法: 引張主応力が許容値以上になった要素に対して、その後亀裂が閉じるまで前述の剛性変化を仮定した異方性を持つものとして解析し、逐次、ひびわれの進展の模様を追跡する。

4. 計算例: 本計算法の適用性を検討するため、實際上、よく問題にされる2つの例題を採り上げた。すなわち、問題1: 3次元体内に挿入され、水平力を受ける棒の挙動、問題2: 深いところに建設された引張を受けるアンカープレート周辺の挙動。これらの双方について、ひびわれによる挙動の変化を調べた。以下にデータを既述するが、3次元解析のもとで得られた結果の特徴、また、それらを通じての解法の評価については、講演時に申し述べる。

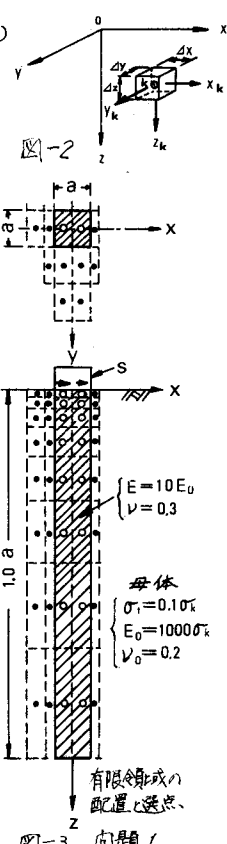


図-2 問題1

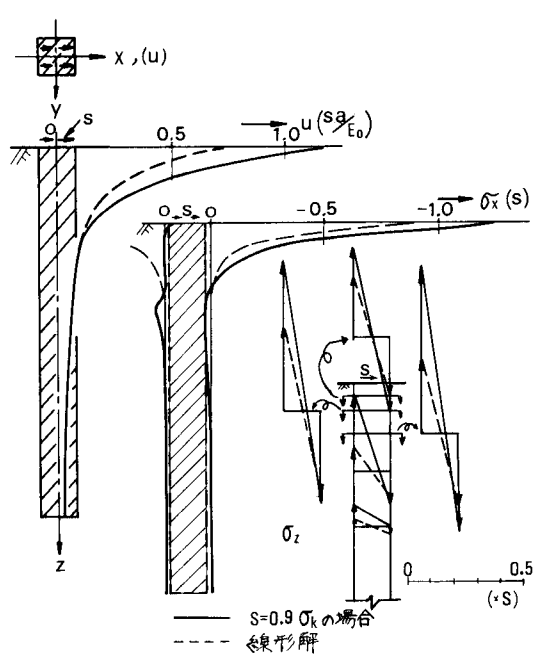


図-4 棒の変形および応力状態 (y=0)

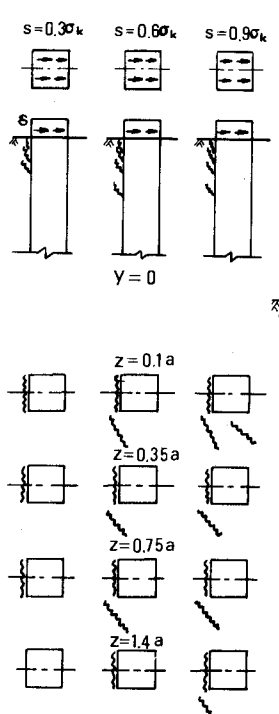


図-5 ひびわれの進展状態

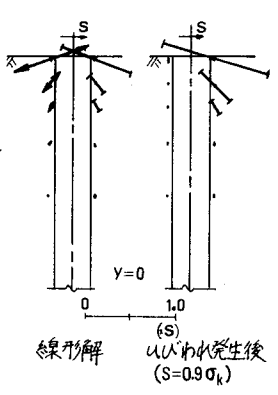


図-6 棒周辺の主応力状態

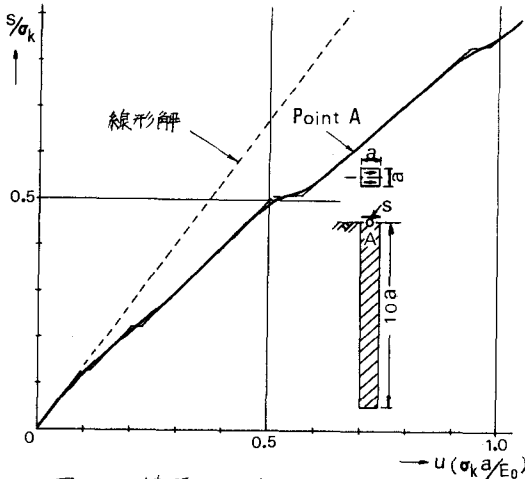


図-7 棒頭部の荷重変位曲線

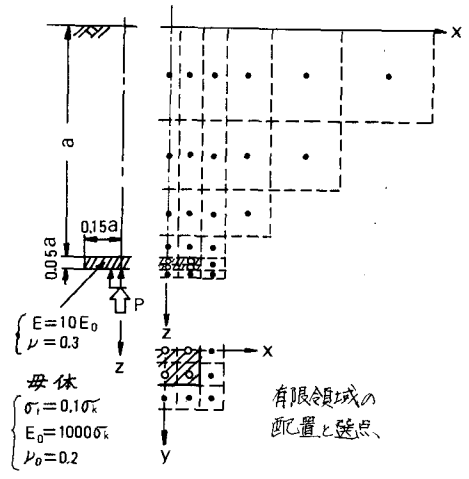


図-8 問題 2

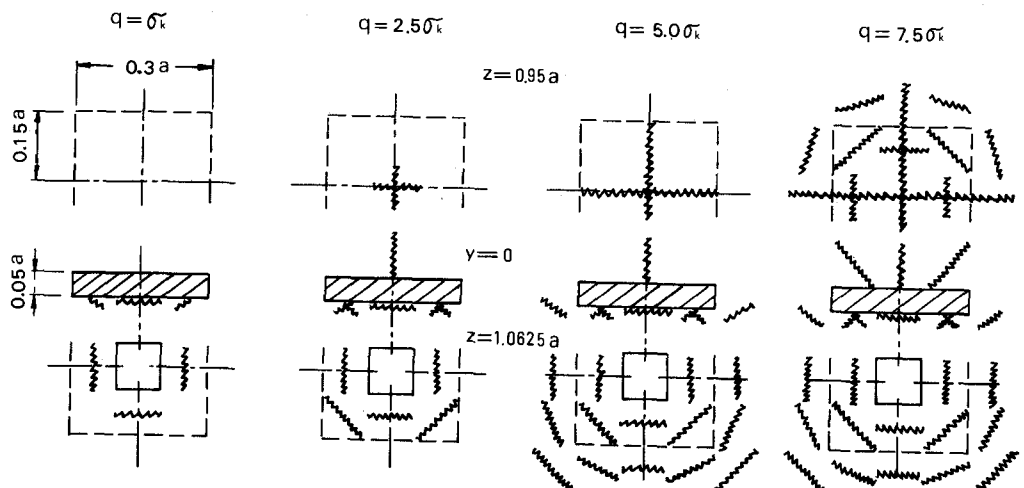


図-9 u波の進展状態

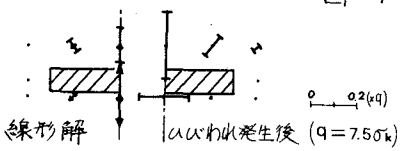


図-10 アンカープレート周辺の主応力状態

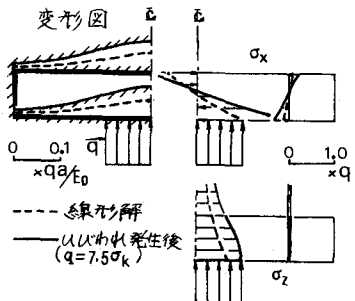


図-11 アンカープレートの変形及び応力

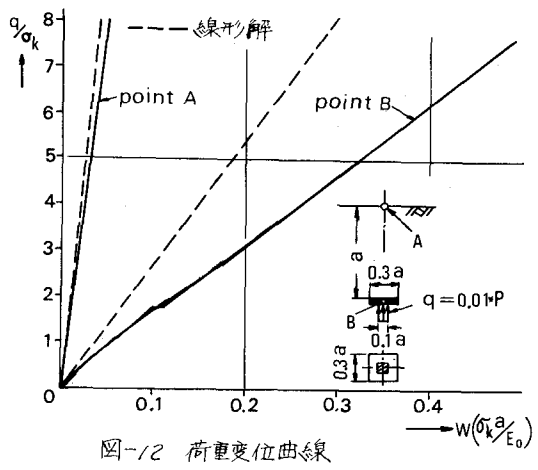


図-12 荷重変位曲線