I-18 連続体力学の構成に関する二・三の考察

京都大学 正員 小林昭一
京都大学大学院 学生員 ○ 矢富盟祥

1. はじめに

"連続体力学"は現実の物理現象を目的に応じたある"時空的平均"でとらえる一つの数学的道具である。そこに現われる物理量は全て現実現象のある時空平均量として定義される仮想的なものである。従って、逆に連続体力学から現実現象を推量しようとすれば（いかにそれを数学的に精密かつ正確に解いても）、時空平均的意味を持つ仮想量からでは、アプリオリにその推量精度には自ら限界があることになる。そこで今、時空的平均操作による現実とのずれの度合を示すものを"Order L_T"と言うことにする。今の場合これは、構成式を実験で決める際の供試体のスケール及び実験の測定時間間隔スケールだと思えば良い。例えば、その供試体を等質，等方と仮定して，ある時間間隔の測定により構成式を決定したとすれば，当然それ以下のOrder現象は無視されたことになる。現実物体の真の挙動に近づけようと思えば，このOrderを出来るだけ小さくすれば良いのであるが，"連続性"と言う仮定がその操作の下限を支配している。　しかるに，連続体力学とは，この限界のところを意味するものとして（特に流体力学に於ては）考えられていたようである。従って，それ以下のOrder現象は分子論等の様に無数の質点系の挙動をとらえ，その統計的平均として，連続体力学を説明している。　しかしながら，そのOrderの意味するところを考えると，何もこの限界のところで構成されていると考える必要はない。そこで，Order l_tで構成可能であるとして，それを使ってOrder L_T ($L \gg l$, $T \gg t$) 現象を考察し得ると考えた。ここでたとえ，Order l_t量の連続性の仮定が無理であっても，現実の一つの説明にはなることに注意して欲しい。一般的には，Order l_tのある時空平均の結果がOrder L_T現象であろう。　しかし，個々の物理量がその様な関係にあっても，その積が生じる部分，及び構成式（特に不安定現象が生じる時）は，必ずしも先の時空平均の関係にはならない。以上より"内部構造"を考えるとは，特定のOrder内の内部現象を考えることではなく，より小さいOrder現象を考察する必要があることが分かる。　この様な観点から，Mixture，一般化された連続体，及び内部構造の非可逆性を示す物体（塑性，破壊，etc）を考察した。　以下，"式"等の詳細は，当日，時間の許す限り述べることにして，もう少し具体的に考え方を記す。但し話を簡単にする為，以後平均操作は空間的のみに限ることにする。尚，Eringenが彼のMicromorphic理論の説明時に，"密度"のこの様な空間Order依存性に言及しているが，我々の様にこのOrder依存性を統一的に明確な形として導入しているのではない。違いは明白であるが，ここでは，詳しく説明しない。

2. 内部構造を考慮した連続体理論

"Body"は，Nollが定義した様に"Particle X_L"からなる三次元微分可能多様体であるとする。ここで"Particle X_L"とは，Order L 近傍（例えば，直径Lの球状領域を想像すれば良い。）の物質集合の重心を代表さすと考える。従って，そのOrderに依存し，時にはMixtureと考えねば，現実の幾何学的配位とのずれが大きくなる時もある。しかしその場合でも，各要素のParticleは，それぞれの物質の重心ではなく，Mixture全体の重心に対応していると考える。（そう考えることにより，TruesdellのMixtureに対し"各点には，同時に全ての要素が存在する"として釣合式を立てたことの意味が明確となる。）又考えたOrderに依りBodyの幾何構造を常にユークリッド空間に押し込むのが無理な場合，更に一般的な空間（例えば，リーマン，非リーマン空間等）へ拡張され得る。（連続転位の現象は，その例の一つである。）

同時に，このParticle X_Lには，ある時刻tにおける種々の物理量Φ_L，及びそれらを関係づける力学的性質，

すなわち、構成式 f^L が、それぞれのそのOrderの平均的特性として付与されている。アプリオリに与えられる物理量 Φ_L をPrimitive elementと言い、今の場合、その中に各釣合量 Φ_L のGrow rate Φ_L^+ をも含める。すると、それらのelements Φ_L を関係づけるもののうち、物質に無関係なものが、エントロピー不等式をも含めた、釣合法則である。（以上、Φ, f, Φ, Φ^+ 等は、それぞれの物理的意味に応じたtensor量である。）
次に前に述べた様に、l（$\ll L$）なるOrderのprimitive elements Φ_l を考え、Φ_L との関係が

$$\Phi_L(X_L, t) = M(\ \Phi_l(X_l, t)\ ) \qquad (1)$$

なる関係にあるとする。ここでMはOrder L 近傍内で、それぞれのelementに応じた、ある空間的平均操作を意味する。(1)に $\Phi_L^+ \geqq 0$（不等号はエントロピーの時のみ）及び他のelementsを代入し、若干の仮定により内部構造order l を考慮したOrder L の釣合式及びエントロピー不等式を導き、EringenのMicromorphic、Green & RivlinのMultipolar等の一般化された連続体理論と比較検討した。特に注意すべきは、Bodyの配位の時間の連続関数であるMotion $\chi^L(X_L, t)$ である。今、これが存在するとし
$\chi^L(X_L, t_0) = \chi^l(X_l, t_0) = X$ （$t_0 < t$）であったとしても　一般には

$$\chi^L(X, t) \neq \chi^l(X, t) \qquad (2)$$

なることが、Order l motionが幾何学的に内部構造を見る量として、一つの重要なParameterになるゆえんである。　次に、塑性、破壊、エントロピー等の（内部）構造の非可逆性現象を議論する。簡単の為Simple Body、

$$T = \mathop{f}_{s=0}^{\infty}(\ F(t-s)\ ) \qquad (3)$$

を例にとって考える。ここで T はCauchy Stress、F はdeformation gradientである。確かに(3)式は、初めと終りの局所的配位が同じであっても、途中の変形過程が異なれば、最終的なStressは異なる。（但し、異なる剛体変形の場合は、Principle of Material Indifferenceより、同一である）　問題は、上記の様な内部構造の変化するものは、経路が異なれば最終の局所配位が全く同一であっても（内部構造）状態は異なる可能性があるということである。言い換えれば、(3)式のみではその変化が全く示せない。そこでその変化を示すparameterとして(2)式に注目したのである。このGapから生じるOrder L 量を新たに定義し内部構造の非可逆性を示す一般的な構成式を導いた。　構造が変化すれば、一般に f^L 自身が変化する。これを判定するスカラー関数の特別なものがYield Functionである。変化の数に応じこの関数が必要になるが、今回は過去の標準塑性論と比較する意味に於て、一個の関数すなわち二種の状態を想定した。　ある条件を課すと、Perzyna、Green & Naghdi、Lee 等の塑性論になり、特に塑性進行状態をtime-independentと仮定するとhypo型となることがわかった。　しかしながらLeeの様に $F = F^e F^p$ や、又全歪を塑性歪（増分）と弾性歪（増分）に分離出来るのは特別な場合のみであることに注意する。それは1つの過程でStressを完全にfreeにした時、局所配位が元の状態に戻ったとしても、内部構造は変化している可能性があることからも分かる。

3. おわりに

この時空"Order"と言う考えは、誰しも多少ながら考えていたものであろうが、連続体力学を使う立場にある我々工学者はこの意味するところを明確に認識する必要がある。コンクリートは、Orderにより、流体にも固体にもなる。土の中を流れる水は、流れ方向が固定されておれば、流れ方向は粘性流体（水自身のOrder l 粘性ではなく、Order L 構造粘性）であり、別の方向は、固体となる。（流体結晶！）。　Darcy則は、Order L では流体の釣合式であり、Order l では、構成関係の一部である。Reinforced Concreteは、Order l で非均質であり、Order L ではMixtureと考えられる。地震波もOrder l では不規則であってもOrder L では滑らかとなる。この様に、固体か流体か、均質か非均質か、弾性か塑性か、層流か乱流か、破壊してるかしてないか……等の現象論的用語は"客観的事実"である現実の現象及び材料に対するものでなく、全て考えるOrderに依存するという意味で"主観的"なものである。　従って、連続体力学により現実現象を推量する際、何らかの供試体実験は、種々の状況に応じ、適格なる"Order判断"が必要とされる。　にもかかわらず　このことを議論したものは　あまり見かけない。