I-15　拡張されたモンテカルロ法による信頼性オーダーの推定

武蔵工業大学土木工学科　正員　星谷勝
〃　〃　○学生員　石井清

1. はしがき

信頼性理論において，構造物の破壊の確率P_fは構造物の耐力Rと荷重Sが与えられたとき，次式で与えられる

$$P_f = \mathrm{Probability}(S>R) = P(S>R) \tag{1}$$

R，Sの確率分布関数$F_R(R)$，$F_S(S)$は一般にはかならずしも単純な確率モデルになるとはかぎらない。そのようなとき，数値実験手法としてモンテカルロ・シュミレーション法があげられる。しかし実際の構造物では，P_fは$10^{-3}\sim10^{-6}$のオーダーであり，P_fを求める為には，$(10^3\sim10^6)\times$数十回の試行が最低限必要となり，コンピューター演算時間の問題が大きくなる。その為，条件付確率法則を用いて，従来よりはるかに少い試行回数で期待されるP_fのオーダーを推定する方法を検討し，あわせて誤差についても理論的考察を行った。

2. 拡張されたモンテカルロ・シュミレーション法

いま事象$(S>R\cap S>S_0\cap R<R_0)$の生起する確率を考える。ここで$S_0$，$R_0$は$S_0<R_0$の任意の確定値とする条件付確率法則によれば，

$$P(S>R\cap S>S_0\cap R<R_0) = P(S>R)\cdot P(S>S_0\cap R<R_0 \mid S>R) \tag{2}$$

$$P(S>R\cap S>S_0\cap R<R_0) = P(S>S_0\cap R<R_0)\cdot P(S>R \mid S>S_0\cap R<R_0) \tag{3}$$

したがって，(2)，(3)式より

$$P_f = P(S>R) = \frac{P(S>S_0\cap R<R_0)\cdot P(S>R \mid S>S_0\cap R<R_0)}{P(S>S_0\cap R<R_0 \mid S>R)} = \frac{P_1 P_3}{P_2} \tag{4}$$

ここで，$P_1=P(S>S_0\cap R<R_0)$，$P_2=P(S>S_0\cap R<R_0 \mid S>R)$，$P_3=P(S>R \mid S>S_0\cap R<R_0)$

P_1は$S>S_0$と$R<R_0$が同時に生起する確率であり，事象$S>S_0$と事象$R<R_0$が独立ならば次式により計算できる

$$P_1 = P(S>S_0)\cdot P(R<R_0) = P_{11}\cdot P_{12} \tag{5}$$

ここで，$P_{11}=P(S>S_0)$，$P_{12}=P(R<R_0)$

したがって適当な確定値S_0，R_0を選定すれば，(5)式の試行回数は大幅に減少する。又，P_2，P_3についても条件が付くことから，試行回数の大幅な減少が期待できる。S_0とR_0については$S\to-\infty$，$R\to\infty$のときP_1，$P_2\to1.0$，$P_3\to P_f$となり，$S_0>R_0$のとき$(S>S_0\cap R<R_0)\subset(S>R)$より意味を失う。

P_fをP_1，P_2，P_3より求めよう。P_1として(5)式を用いれば，P_{11}は0.0〜1.0の一様乱数a_iを発生し，$S_i=F_S^{-1}(a_i)$より，サンプル実現値S_iを求め，$S_i>S_0$なる回数を全試行回数で除すことにより求まる。同様にして求めたP_{12}との積としてP_1が求まる。P_2は0.0〜1.0の一様乱数b_iを発生し，$S_i=F_S^{-1}(b_i)$よりS_iをまず得て，条件$(S>R)$を満足する様に，$F_R(S_i)$と0.0〜1.0の一様乱数C_iとの積d_iによって0.0〜$F_R(S_i)$の一様乱数を作る。そしてR_iを$F_R^{-1}(d_i)$より求め，事象$A(S_i>S_0\cap R_i<R_0)$の生起回数を全試行回数で除せばよい。しかし，$S_i<S_0$のときは事象Aは起きないし，$S_i>R_0$のときは必ず生起する。したがって$S_0<S_i<R_0$のときのみ，

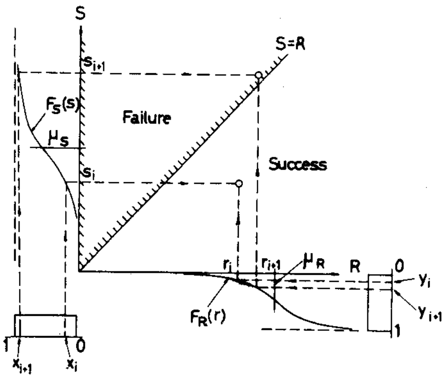

Fig. 1　$P_f = P(s>R)$

すべての手順をふむことになる。P_3は条件よりS_iを$F_S(S_0)$〜1.0の一様乱数e_iから$S_i=F_S^{-1}(e_i)$の関係より求め，R_iを0.0〜$F_R(R_0)$の一様乱数f_iから$R_i=F_R^{-1}(f_i)$の関係より求まる。そして事象($S_i>R_i$)の生起回数を記録し，全試行回数で除すことによって求まる。

3．精度に対する理論解

(4)，(5)式を用いてシュミレーションによりP_{11}，P_{12} P_2，P_3の推定値$\hat{P}_{11}$，$\hat{P}_{12}$，$\hat{P}_2$，$\hat{P}_3$が得られたとするとP_fの推定値$\hat{P}_f$は次式により与えられる。

$$\hat{P}_f=\hat{P}_{11}\cdot\hat{P}_{12}\cdot\hat{P}_3/\hat{P}_2 \tag{6}$$

$$=(n_{11}/N_{11})(n_{12}/N_{12})(n_3/N_3)/(n_2/N_2) \tag{7}$$

ここで，例えば$\hat{P}_a=(n_a/N_a)$はN_a回の独立試行のうちでn_a回，着目した事象が生起したとして，n_aとN_aの比を用いて推定値$\hat{P}_a$とする。このときP_aの推定値$\hat{P}_a$は確率変数であり，しかも二項分布に従う。いま$\hat{P}_{11}$に注目すれば，$\hat{P}_{11}$の期待値は$E[n_{11}/N_{11}]=P_{11}$，分散は$\sigma^2_{\hat{P}_{11}}=P_{11}(1-P_{11})/N_{11}$となる。そして，$P_{11}$の値が小さくても，$N_{11}$が非常に大きな数なので，$\hat{P}_{11}$は，ほぼ正規分布であると仮定できる。すなわち，

$$\hat{P}_{11}=N\left(P_{11},\ \{P_{11}(1-P_{11})/N_{11}\}^{\frac{1}{2}}\right) \tag{8}$$

又，(6)式の右辺をテーラー展開すると，$\hat{P}_f$の平均値，分散は(9)(10)式で与えられる。

$$E[\hat{P}_f]\cong P_{11}\cdot P_{12}\cdot P_3/P_2 \tag{9}$$

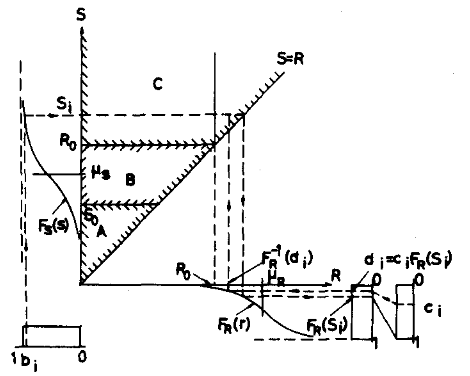

Fig.2　$P_2=P(s>s_0\cap R<R_0\mid s>R)$

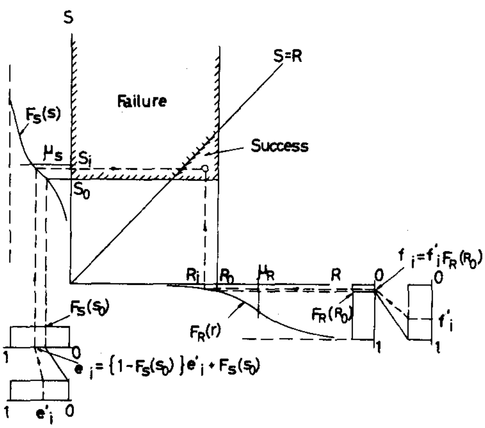

Fig.3　$P_3=P(s>R\mid s>s_0\cap R<R_0)$

$$\sigma^2_{\hat{P}_f}\cong\left\{\frac{P_{11}P_{12}P_3}{P_2}\right\}^2\left\{\frac{1}{P_{11}N_{11}}+\frac{1}{P_{12}N_{12}}+\frac{1}{P_2N_2}+\frac{1}{P_3N_3}\right\}=P_f^2\beta^2 \tag{10}$$

ここで，$\beta^2=1/(P_{11}N_{11})+1/(P_{12}N_{12})+1/(P_2N_2)+1/(P_3N_3)$

$\hat{P}_f$がテーラー展開により$\hat{P}_{11}$，$\hat{P}_{12}$，$\hat{P}_2$，$\hat{P}_3$の線形の関数として近似され，しかも，$\hat{P}_{11}$，$\hat{P}_{12}$，$\hat{P}_2$，$\hat{P}_3$がそれぞれ，ほぼ正規分布することから，$\hat{P}_f$もまた，正規分布とみなせる。すなわち，

$$\hat{P}_f=N(P_f,\ P_f\beta) \tag{11}$$

したがって，$(1-\alpha)$%の信頼区間は，

$$P\left(\left|\frac{\hat{P}_f-P_f}{P_f\beta}\right|<K_{\alpha/2}\right)=P\left(|\hat{P}_f-P_f|<K_{\alpha/2}\right)=1-\alpha \tag{12}$$

たとえば，95%信頼区間は，$|\hat{P}_f-P_f|\leqq 1.96\beta P_f$ (13)

いま，P_f，βの真値はわからないから，(16)式の厳密な計算は不可能であるが，$\hat{P}_f$の精度を調べるべく，(13)式の右辺を次のように近似することにより，数値計算ができる。

$$1.96\beta P_f\approx 1.96\hat{P}_f\left\{\frac{1}{\hat{P}_{11}N_{11}}+\frac{1}{\hat{P}_{12}N_{12}}+\frac{1}{\hat{P}_2N_2}+\frac{1}{\hat{P}_3N_3}\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{14}$$

4．例題

例題として，RとSが共に正規確率分布である場合を検討した。この場合，P_fはすぐに手計算により求まる簡単な例題ではあるが，精度と試行回数の関係を非常に明確に求めることができる。そして本方法の目的とするP_f

のオーダー推定が実際に可能であり，しかも有用であるかどうかを検討できる．

例として，R＝N（10.0, 1.0），S＝N（6.0, 1.0）とした。このとき，P_fの理論解は，0.233×10^{-2}である。$\hat{P}_f$の95％信頼区間は(14)式により与えられるが，右辺$\hat{P}_f$には理論解$P_f=0.233\times10^{-2}$を使用し，N_{11}，N_{12}，N_2，N_3はすべて同一の試行回数N（Nは10^3回と2×10^3回）とした。

種々のパラメーターについてシュミレーションによる数値結果を表に示す。

S_0	R_0	N	$\hat{P}_{11}$	$\hat{P}_{12}$	$\hat{P}_2$	$\hat{P}_3$	$\hat{P}_f=\dfrac{\hat{P}_{11}\hat{P}_{12}\hat{P}_3}{\hat{P}_2}$	$\lvert\hat{P}_f-P_f\rvert$の95％信頼区間
6.0	8.0	1000	0.539	0.280×10^{-1}	0.519	0.781×10^{-1}	0.277×10^{-2}	0.104×10^{-2}
		2000	0.549	0.285×10^{-1}	0.518	0.815×10^{-1}	0.248×10^{-2}	0.073×10^{-2}
6.0	9.0	1000	0.539	0.186	0.531	0.293×10^{-1}	*0.548×10^{-2}	0.095×10^{-2}
		2000	0.549	0.187	0.532	0.293×10^{-1}	*0.562×10^{-2}	0.067×10^{-2}
6.0	10.0	1000	0.539	0.454	0.531	0.501×10^{-2}	0.231×10^{-2}	0.207×10^{-2}
		2000	0.549	0.454	0.532	0.501×10^{-2}	0.234×10^{-2}	0.146×10^{-2}
6.0	11.0	1000	0.539	0.785	0.531	0.200×10^{-2}	0.159×10^{-2}	0.325×10^{-2}
		2000	0.549	0.783	0.532	0.250×10^{-2}	0.202×10^{-2}	0.206×10^{-2}
6.0	12.0	1000	0.539	0.965	0.531	0.400×10^{-2}	0.392×10^{-2}	0.231×10^{-2}
		2000	0.549	0.962	0.532	0.250×10^{-2}	0.248×10^{-2}	0.205×10^{-2}
7.0	10.0	1000	0.212	0.454	0.224	0.140×10^{-1}	*0.602×10^{-2}	0.131×10^{-2}
		2000	0.217	0.454	0.227	0.175×10^{-1}	*0.758×10^{-2}	0.084×10^{-2}
7.0	11.0	1000	0.212	0.785	0.224	0.501×10^{-2}	0.372×10^{-2}	0.209×10^{-2}
		2000	0.217	0.783	0.227	0.816×10^{-1}	*0.611×10^{-2}	0.118×10^{-2}

4. あとがき

上の例題を通して，ごく限られたコンピュータ時間内（試行回数）でP_fのオーダー推定が十分可能であることが，理論的にも，実際に行ったシュミレーション結果からも，よく把握できた。

P_fのオーダーを推定するための別のモンテカルロ法のアプローチを示す。この方法は途中の積分にモンテカルロ法を使用するものである。P_fはR，Sの同時確率密度関数$f_{RS}(r, s)$の積分として次の様にあらわせる．

$$P_f=P(R<S)=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{s} f_{RS}(r, s)\,dr\,ds \tag{15}$$

R，Sが独立ならば，

$$P_f=\int_{-\infty}^{\infty} F_R(s)\ f_S(s)\ ds \tag{16}$$

sをU(0, S_u)の確率変数とみなし，$g(s)=F(s)\ f_S(s)$を考える。$g(s)$の平均値は，

$$E[g(s)]=\int_0^{S_u} g(s)\frac{1}{S_u}ds=\frac{1}{S_u}\int_0^{S_u} g(s)\,ds\approx\frac{1}{S_u}\int_0^{\infty} F_R(s)\,f_S(s)\,ds \tag{17}$$

一方，

$$E[g(s)]=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} g_i(s_i) \tag{18}$$

(17)，(18)式より，

$$\hat{P}_f=\frac{S_u}{N}\left(\sum_{i=1}^{N} g(s_i)\right) \tag{19}$$

P_fのオーダー推定の為には，(19)式において，Nを小さく抑え，精度を保つことが問題となる。
このようなアプローチは今後，十分研究される必要がある。