I-14　　Transfer matrix 法に関する一考察
（双曲線関数項を含む場合）

大阪市立大学　正員　中井　博

1. まえがき

薄肉部材より構成された土木構造物のより忠実な応力解析をする際，transfer matrix を活用すると便利であるが，matrixの要素中に双曲線関数で表わされた項が存在し，しかもその関数値が極端に大きい場合，誤差が生じ所要の精度が期待できない場合をしばしば経験する。本文はこのような欠点を解消するために，2，3の具体的な問題を例として考察を試みたものである。

2. はりのそりねじり問題

はりのそりねじりに関する基礎式は，ねじり角を θ，分布トルクを q_t とすると周知のとおり，[1),2),3)]

$d^4\theta/dx^4 - \alpha^2 \cdot d^2\theta/dx^2 = q_t$，ただし $\alpha = \sqrt{GJ/EI_w}$　（GK；ねじり剛性，EI_w；そりねじり剛性）…(1)

で与えられる。これを transfer matrix 法で表わすと，いわゆる field matrix は式(2)のようになる。

$$\mathbb{F}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta & \theta' & M_w & T_w & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & \ell & -(1-\cosh\alpha\ell)/GJ & -(\sinh\alpha\ell-\alpha\ell)/\alpha GJ & -q_t\{1-\cosh\alpha\ell+(\alpha\ell)^2/2\}/\alpha^2 GJ \\ 0 & 1 & \alpha\sinh\alpha\ell/GJ & (1-\cosh\alpha\ell)/GJ & q_t(\sinh\alpha\ell-\alpha\ell)/\alpha GJ \\ 0 & 0 & \cosh\alpha\ell & -\sinh\alpha\ell/\alpha & -q_t(1-\cosh\alpha\ell)/\alpha^2 \\ 0 & 0 & -\alpha\sinh\alpha\ell & \cosh\alpha\ell & -q_t\sinh\alpha\ell/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_k \end{array} \cdots(2)$$

式(2)では，双曲線関数項とそうでない項とが混在しているので，これを分離するために，

$$\left.\begin{aligned} \theta_s &= \theta - M_w/GJ \\ T &= T_s + T_w \end{aligned}\right\} \cdots (3)_{1,2}$$

なる新しい物理量を考える。すると，式(2)は θ_s，T を用いて表わすことができ，2行目と3行目のみ双曲線関数項を含むことになる。そこで，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{\psi} &= \psi/\cosh\alpha\ell \\ \tilde{M}_w &= M_w/\cosh\alpha\ell \end{aligned}\right\} \cdots (4)$$

すなわち，式(3)の変換後，Field matrixの2，3行目を $\cosh\alpha\ell$ で割ったものを $\tilde{\mathbb{F}}_k$ と表わせば，式(5)が得られる。

$$\tilde{\mathbb{F}}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_s & \theta' & M_w & T & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & x/GJ & -q_t\ell^2/2GJ \\ 0 & 1 & \alpha\tanh\alpha\ell/GJ & (1-\cosh\alpha\ell)/GJ\cosh\alpha\ell, & q_t(\sinh\alpha\ell-\alpha\ell)/\alpha GJ\cosh\alpha\ell \\ 0 & GJ\tanh\alpha\ell/\alpha & 1 & -\tanh\alpha\ell/\alpha & -q_t(1-\cosh\alpha\ell)/\alpha^2\cosh\alpha\ell \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -q_t\cdot\ell \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]_k \end{array} \cdots(5)$$

したがって，構造物全体の計算は，

$$\tilde{y}_{kn} = \tilde{\mathbb{F}}_n \mathbb{P}_{n-1} \tilde{\mathbb{F}}_{n-1} \cdots \mathbb{P}_k \tilde{\mathbb{F}}_k \cdots \tilde{\mathbb{F}}_2 \mathbb{P}_1 \tilde{\mathbb{F}}_1 y_{1,0} \cdots (6)$$

によって行なうことができる。ただし，$\mathbb{P}_k$ は point matrix とする。たとえば，第 $k+1$ パネルの状態量 $\tilde{Y}_{k+1,0}$（左端）を初期ベクトル $y_{1,0}$ で表わせば，式(7)のようである。ここで，要素中｛を付けたものは，つぎの field matrix $\tilde{\mathbb{F}}_{k+1}$ を乗じる際，2，3行目の要素を求めるときには下側に示す値を，その他は上側の値を用いるものとする。

$$\mathbb{Y}_{k+1,0} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} \theta_{s,1,0} & \theta'_{1,0} & M_{w,1,0} & T_{1,0} & 1 \end{array} \\ \left[\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & \dfrac{k\ell}{GJ} & -\dfrac{q_t}{2GJ}(k\ell)^2 \\ 0 & \dfrac{\cosh k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} & \dfrac{\alpha}{GJ}\dfrac{\sinh k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} & \dfrac{1-\cosh k\alpha\ell}{GJ\cosh^k\alpha\ell} & \dfrac{q_t}{\alpha GJ}\dfrac{\sinh k\alpha\ell-k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} \\ 0 & \dfrac{GJ}{\alpha}\dfrac{\sinh k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} & \dfrac{\cosh k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} & -\dfrac{\sinh k\alpha\ell}{\alpha\cosh^k\alpha\ell} & -\dfrac{q_t}{\alpha^2}\cdot\dfrac{1-\cosh k\alpha\ell}{\cosh^k\alpha\ell} \\ 0 & 0 & 0 & \begin{cases} 1 \\ 1/\cosh^k\alpha\ell \end{cases} & \begin{cases} -(q_t k\ell+T_p) \\ -(q_t k\ell+T_p)/\cosh^k\alpha\ell \end{cases} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \begin{cases} 1 \\ 1/\cosh^k\alpha\ell \end{cases} \end{array}\right] \end{array} \cdots(7)$$

（ただし，等断面，等パネル割の場合）

ところで，はりが中間支点でねじりに対して剛支持されている場合，式$(3)_1$より θ を求め，それを0とおけばよいが，このようにすると計算精度上好ましくないので，中間支点 r のところに生ずる未知反力 T_r^s のほかに新しい未知力 $M^s_{w,r}$ を導入し，式$(3)_1$よりつぎのような条件式を考えればよい。

$$M_{w,r,\ell} - M^s_{w,r} = 0, \quad \theta_{s,r,\ell} - M^s_{w,r}/GJ = 0 \quad \cdots (8)$$

さらに，αl が大きい場合には，同様に $T^{s}_{s,r}$ を未知量として導入して $(T_s = GJ\theta')$，

$$\mathrm{T}_{s,r} - T^{s}_{s,r} = 0 \quad \cdots\cdots (9)$$

なる条件式を附加すると，拘束度が大きくなり計算精度も向上することができる。数値計算の際には，以上の式を

$$\theta_s = P_c l_c^2/GJ_c \cdot \theta_s^*, \quad \tilde{\theta}' = P_c l_c/GJ_c \cdot \tilde{\theta}^*, \quad \tilde{M}_w = P_c l_c/\alpha_c \cdot \tilde{M}_w^*, \quad T = P_c l_c T^* \quad \cdots\cdots (10)$$

のように無次元化（suffix c のつけたものが基準量）する。Facom 270/30 により Double precision を用いて計算したところ，式(2)のような従来の方法に比べて αl の増大に伴う精度の劣化は見られないようである。

3. 曲線ばりのそりねじり問題

曲線ばりのそりねじりに関する基礎式は，曲げとの連成問題として取り扱うべきであるが，曲げモーメント M_y を既知とすれば，

$$d^4\theta/ds^4 - \alpha^2 \cdot d^2\theta/ds^2 = M_y/R_s - q_t \quad (ds = R_s d\phi \quad R_s\text{：曲率半径}, \ \phi\text{：中心角}) \cdots (11)$$

で与えられる。これは，**2.** で述べた式(1)と同形であるので，ほとんど同様な手法により精度のよい計算を行なうことができる。詳細は I-95 を参照にされたい。

4. 鋼床板げた橋の shear lag 問題

鋼床板を有する π 形断面げたのたわみを w，デッキプレートの shear lag による軸方向変位 f に関する基礎式は，けたに作用する曲げモーメントを M，せん断力を Q とすれば，次式のように与えられる。

$$\left.\begin{aligned} d^2 f/dx^2 - \alpha^2 f &= \eta Q, \\ d^2 w/dx^2 &= -M/EI - \gamma \cdot df/dx \end{aligned}\right\} \cdots\cdots (12) \quad (\alpha, \eta, \gamma\text{ は断面によるパラメーター})$$

この連立方程式を分布荷重 q に対して解き，field matrix を求めると式(13)のようになる。

$$\mathbb{F}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{cccccc} w & \varphi & f & f' & M & Q \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & l & -\gamma(\sinh\alpha l - \alpha l)/\alpha & -\gamma(\cosh\alpha l - 1)/\alpha^2 & -l^2/2EI & -\gamma\eta(\sinh\alpha l - \alpha l)/\alpha^3 - l^3/6EI \\ 0 & 1 & -\gamma(\cosh\alpha l - 1) & -\gamma \sinh\alpha l/\alpha & -l/EI & -\gamma\eta(\cosh\alpha l - 1)/\alpha^2 - l^2/2EI \\ 0 & 0 & \cosh\alpha l & \sinh\alpha l/\alpha & 0 & \eta(\cosh\alpha l - 1)/\alpha^2 \\ 0 & 0 & \alpha\sinh\alpha l & \cosh\alpha l & 0 & \eta\sinh\alpha l/\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{array} \cdots (13)$$

（荷重項は省略する）。

ここで，**2.** と同様に双曲線関数項を分離するために，

$$\left.\begin{aligned} w_b &= w + \gamma/\alpha^2 \cdot f' \\ \varphi_b &= \varphi + \gamma \cdot f \end{aligned}\right\} \cdots (14)$$

とおき，そして3行目と4行目の f，f' を，

$$\left.\begin{aligned} \tilde{f} &= f/\cosh\alpha l \\ \tilde{f}' &= f'/\cosh\alpha l \end{aligned}\right\} \cdots (15)$$

のように単位化すると，式(16)が得られることになる。

$$\tilde{\mathbb{F}}_k = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} w_b & \varphi_b & f & f' & M & Q & 1 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1 & l & 0 & 0 & -l^2/2EI & \gamma\eta l/\alpha^2 - l^3/6EI & q l^4/24EI - q\gamma\eta l^2/2\alpha^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -l/EI & -l^2/2EI & q l^3/6EI \\ 0 & 0 & 1 & \tanh\alpha l/\alpha & 0 & \eta(\cosh\alpha l - 1)/\cosh\alpha l & -q\eta(\sinh\alpha l - \alpha l)/\alpha^3\cosh\alpha l \\ 0 & 0 & \alpha\tanh\alpha l & 1 & 0 & \eta\tanh\alpha l/\alpha & -q\eta(\cosh\alpha l - 1)/\alpha^2\cosh\alpha l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & l & -q l^2/2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -q l \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{array} \cdots (16)$$

この field matrix $\tilde{\mathbb{F}}_k$ を用いれば，構造物全体の計算も格点行列や連続げた橋の中間支点の処理も **2.** で述べた方法と類似して行なうことができ，任意支持された鋼床板げた橋の shear lag 現象を精度よく解析することができる。

5. あとがき

transfer matrix 法は，任意支持されたはりの各種の問題を解析するのに適した方法であるが，マトリックスの要素中に双曲線関数項を含むと所要の計算精度を期待できない難点があった。しかし，本文の方法によると双曲線項が分離され，また単位化されているので，これらの問題点が解決されたように思われる。さらに，本文の方法は，弾性支承上のはりや，けたの断面変形などの問題[1,2]にも拡張できると考えられる。

参考文献；1) Kollbrunner; Dünnwandige Stäbe '72, 2) Vlasov; 薄肉弾性ばりの理論, 3) 小松; 薄肉構造物の理論と計算