I-8 　板とパイプとの接合問題について

東京大学　正員　奥村敏恵
埼玉大学　正員 ○浜島良吉

1. まえがき

連続体の力学は、数学的には偏微分方程式として表わされるが、この厳密解は特定の場合にしか得られていない。そこで種々の近似解法が研究され、有限要素法によっても今まで解析不能の多くの問題が解かれている。又変分法に基礎を置く、この有限要素法では解かれ得ない問題に対して weighted residual 法を用いることにより、さらに多くの問題が解かれ得る。collocation 法、subdomain 法、Galerkin 法、そして least square 法等がそれであり、汎関数の存在しない問題に対しても広く用いられ得る。これは、直接、微分方程式に適当な weight を乗じ、その領域内で積分することにより近似解を得る方法であり、例えば、帯板要素法においては、Galerkin 法（Kantrovich 法）を用いて、偏微分方程式を常微分方程式に変換し、板長手方向に対して無限自由度の解を得ることができる。こうした有限要素法に解析解を取り入れた解析法は、大きな応力集中の生ずる問題に対しては特に有効となる。そこで本小論においては、殻と殻、あるいは、板と殻とが接合する構造においてはその接合部近傍に大きな応力集中集中が生ずるが、このような構造の解析に対し weighted residual 法を用いることにより、それぞれの構造要素の解析解をそのまま用いることができることを示した。又これらの構造要素の基礎微分方程式は、複素力を用いた曲面板の基礎式より導くことができる。

2. 解析方法

境界値問題を一般に次のように表わす。

基礎微分方程式　　$L(\phi)=g$ —— (1)

境界条件式、接合条件式　　$B(\phi)=g$ —— (2)　（L, B は微分演算子）

ここで (1), (2) 式の未知量 ϕ を未知常数 X_k の線形結合として表わす。　$\phi=\sum_{k=1}^{n}\phi_k X_k$ —— (3)

ϕ_k を基礎微分方程式 (1) を満足するように選び (3) を (2) に代入すれば　$R=B(\phi)-g$

R は残差であり、境界線、接合線の discrete な有限点において、この残差の二乗の和が最小となるように X_k を定める。

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X}\int_s \delta(s_j-s)\,(B(\phi)-g)^2\,ds=0 \quad \text{—— (4)}$$

$\delta(s_j-s)$ は ディラックのデルタ関数であり、s は境界線上に沿う長さである。又総和記号 $\sum_{i=1}^{m}$ は境界線、接合線の総和を表わす。(4) 式より

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{\partial}{\partial X}\left(\mathbb{B}\mathbb{X}-\mathbb{G}\right)^T\left(\mathbb{B}\mathbb{X}-\mathbb{G}\right)=0$$

$$\sum_{i=1}^{m}\mathbb{B}^T\mathbb{B}\mathbb{X}=\sum_{i=1}^{m}\mathbb{B}^T\mathbb{G} \quad \text{—— (5)}$$

ここで (4) 式を次のように表わす。

$$\sum_{i=1}^{m}\int_s \frac{\partial}{\partial X}(\mathbb{B}\mathbb{X}-\mathbb{G})^T\delta(s_j-s)\,(B(\phi)-g)\,ds \quad \text{—— (6)}$$

これより $\frac{\partial}{\partial X}(\mathbb{B}\mathbb{X}-\mathbb{G})^T\delta(s_j-s)$ を $(B(\phi)-g)$ の weight function と考えることができる。ここで $\mathbb{B}^T\mathbb{B}$ は正値対称行列となり $\sum_{i=1}^{m}$ により (2) 式の条件式の数だけの係数マトリックス $\mathbb{B}^T\mathbb{B}$ を重ね合わせることにより、全体の係数マトリックスが形成される。これは有限要素法において全体の剛性マトリックスが要素の剛性マトリックスを重ね合わせることにより得られることに類似している。

3. ダイヤフラムで補強されたパイプの応力解析

図-1 で示されるような、ダイヤフラムで補強されたパイプが荷重盤をとおして力を受ける構造を考える。

ここでダイヤフラムはさらにスチフナーリングで補強されている。ここで構造要素、I, II, III, IV, V を分離しそれぞれの要素の解析解を求め、その中に含まれる未知常数は境界条件、接合条件を満足するように (5) 式より決定される。ここでパイプの解から Beam theory の解を分離することにより解析は簡単化される。

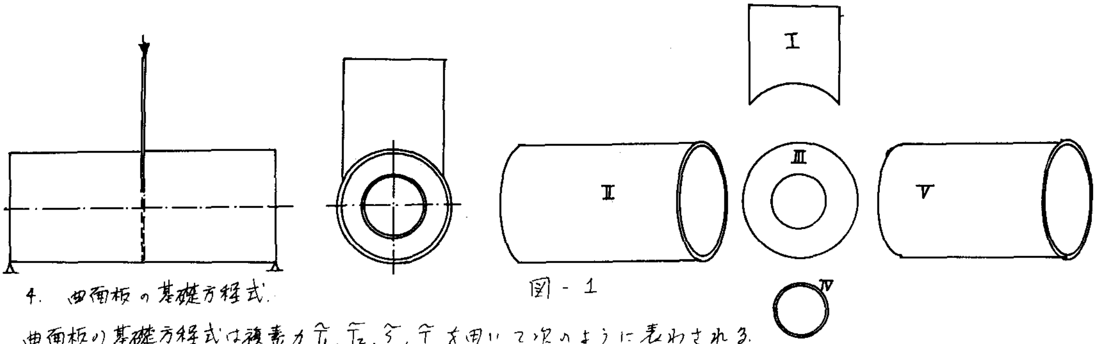

図 - 1

4. 曲面板の基礎方程式

曲面板の基礎方程式は複素力 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}, \tilde{T}$ を用いて次のように表わされる

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\tilde{T}_1}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_2\tilde{T}}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{S}-\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{T}_2\right]+i\frac{c}{R_1}\frac{1}{A_1}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\alpha_1}+q_1=0\\&\frac{1}{A_1A_2}\left[\frac{\partial A_2\tilde{S}}{\partial\alpha_1}+\frac{\partial A_1\tilde{T}_2}{\partial\alpha_2}+\frac{\partial A_2}{\partial\alpha_1}\tilde{S}-\frac{\partial A_1}{\partial\alpha_2}\tilde{T}_1\right]+i\frac{c}{R_2}\frac{1}{A_2}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\alpha_2}+q_2=0\\&\frac{\tilde{T}_1}{R_1}+\frac{\tilde{T}_2}{R_2}-ic\,\Delta(\tilde{T})=q_n\end{aligned}\right\}\cdots(7)$$

$$\Delta(\dots)=\frac{1}{A_1A_2}\left\{\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left[\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\dots)}{\partial\alpha_1}\right]+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left[\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\dots)}{\partial\alpha_2}\right]\right\}$$

ここで A_1, A_2 はラーメの定数であり 曲線座標 α_1, α_2 が定まれば決定される量であり R_1, R_2 は主曲率半径を表わす 図-2 に示される $T_1, T_2, \cdots$ や、ひずみ・変位成分は複素力 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}$ を用いて表わすことができる.

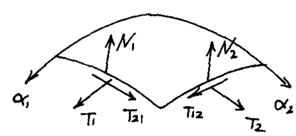

図-2

5. パイプの解

$\alpha_1, \alpha_2, \cdots$ 等は　$\alpha_1=\frac{x}{a}=\xi$, $\alpha_2=\theta$, $A_1=A_2=a$, $R_1=\infty$, $R_2=a$.

これを(7)式に代入すればパイプに対する基礎微分方程式が得られる.

$$\Delta\Delta(\tilde{T})+\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\theta^2}+i2b^2\frac{\partial^2\tilde{T}}{\partial\xi^2}=0,\quad\left(\text{ただし }\Delta(\dots)=\frac{\partial^2(\dots)}{\partial\xi^2}+\frac{\partial^2(\dots)}{\partial\theta^2}\right)$$

これより $\tilde{T}=\hat{A}_0e^{-b(1-i)\xi}+\{\tilde{A}_1e^{-b(1-i)\xi}+C_1+C_2\xi\}\cos\theta+\sum_{k=2}^{\infty}\left(\tilde{A}_ke^{\alpha_1\xi}+\tilde{B}_ke^{\alpha_2\xi}\right)\times\cos k\theta$

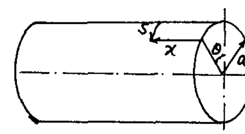

図-3

6. 荷重盤, ダイヤフラムの解

平板の基礎微分方程式は複素応力関数 $\tilde{\Phi}$ を用いることにより次式で表わされる

$$-ic\,\Delta\Delta(\hat{\Phi})=q_n.\quad\left(\Delta(\dots)=\left[\frac{\partial}{\partial\alpha_1}\left(\frac{A_2}{A_1}\frac{\partial(\dots)}{\partial\alpha_1}\right)+\frac{\partial}{\partial\alpha_2}\left(\frac{A_1}{A_2}\frac{\partial(\dots)}{\partial\alpha_2}\right)\right]\frac{1}{A_1A_2}\right)$$

極座標を用いれば　$\alpha_1=\rho$, $\alpha_2=\theta$, $A_1=a'$, $A_2=a'\rho$, 又 $q_n=0$ より

これより　$-ic\,\Delta\Delta(\hat{\Phi})=0$,　$\left(\Delta(\dots)=\frac{1}{a'^2}\left[\frac{\partial^2}{\partial\rho^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial}{\partial\rho}+\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2}{\partial\theta^2}\right]\right)$

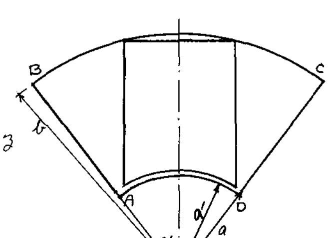

図-4

荷重盤の解は図-4 の扇形板に対する解を用いるが扇形板を一担矩形板に写像し、矩形板の基礎方程式を満足する応力関数 $\tilde{\Phi}$ を求め、それを扇形板に逆写像することによりもとめられる

$$\hat{\Phi}=\frac{\rho^2}{2}\tilde{A}_0^{I}+\log\rho\,\hat{B}_0^{I}+\tilde{C}_0^{I}\rho^2\ln\rho+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\hat{A}_n^{I}\rho^{n'}+\tilde{B}_n^{I}\rho^{n'+2}+\tilde{C}_n^{I}\rho^{-n'}+\hat{D}_n^{I}\rho^{-n'+2}\right)\cos n'\theta+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\left(\tilde{E}_n^{I}+\rho^2\tilde{F}_n^{I}\right)e^{-\beta_n\alpha}\cosh\beta_n\theta\cos(\beta_n\ln\rho)\right]$$

$$n'=\frac{n\pi}{\alpha_1},\quad\beta_n=\frac{(2n-1)\pi}{2}\frac{1}{\ln b/a'}$$

ダイヤフラムの解は

$$\hat{\Phi}=\frac{\rho^2}{2}\tilde{A}_0^{III}+\log\hat{B}_0^{III}+\left(\tilde{C}_1^{III}\rho^{-1}+\rho^3B_1^{III}\right)\cos\theta+\sum_{n=2}^{\infty}\left(\rho^n\hat{A}_n^{III}+\tilde{B}_n^{III}\rho^{n+2}+\tilde{C}_n^{III}\rho^{-n}+\hat{D}_n^{III}\rho^{-n+2}\right)\cos n\theta$$

複素力 $\tilde{T}_1, \tilde{T}_2, \tilde{S}$ は複素応力関数 $\tilde{\Phi}$ を用いて次式より得られる

$$\tilde{T}_1=\frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\theta^2}+\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\rho},\quad\tilde{T}_2=\frac{\partial^2\tilde{\Phi}}{\partial\rho^2},\quad\tilde{S}=-\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial\tilde{\Phi}}{\partial\theta}\right)$$

7. スチフナーリングの解

(7)式よりスチフナーリングの基礎方程式は次のようになる.

$$\frac{\partial\tilde{T}_2}{\partial\theta}+\frac{i}{2b^2}\frac{\partial\tilde{T}}{\partial\theta}=-q_2r,\quad\tilde{T}_2-\frac{i}{2b^2}\Delta(\tilde{T})=q_nr\quad\left(\Delta(\dots)=\frac{\partial^2(\dots)}{\partial\theta^2}\right)$$

$$2b^2=\frac{r}{c},\quad c=\frac{h}{\sqrt{12}}$$

これより基礎微分方程式は次のようになる

$$\frac{\partial^2\tilde{T}_2}{\partial\theta^2}+\tilde{T}_2=r\left(q_n-\frac{\partial q_2}{\partial\theta}\right)$$

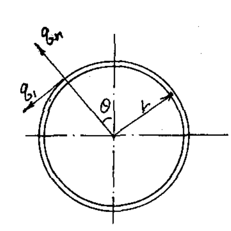

図-5

8. あとがき

本解析法による計算の詳細は当日発表する予定である.