I-4　吊橋主塔の大変形解析のための一計算法

東京都立大学　正員　伊藤 文人
東京都立大学　学生員　○三品 徹

1. まえがき

長大吊橋の主塔は、橋軸方向に塔頂がケーブルで強制変位を与えられ、同時に鉛直荷重が加えられるものとして設計される。これまでこの設計にはBirsallの論文に大きく影響された方法（F値法）が多く用いられていたが、その方法では主塔の極限耐荷力を必ずしも正しく推定できるわけではないので、本州四国連絡橋公団では、その耐荷力を「有限変形理論にもとずき計算」することを要求する設計要領(案)を作成した。[1]

有限変形理論による解法の1つに、有限要素法を用い大変形による幾何学的非線形問題として解く方法があるが、この場合には普通荷重漸増法による逐次近似解法が用いられている。[2)3)] しかしこの方法を用いた場合には、最も重要な主塔の最高荷重付近で、繰り返し計算の収束性がきわめて悪くなり[4)]、厳密解を求めることが困難になることが良く知られている。ここではその収束性の悪さを改善する為の一方法を検討した結果について報告する。

2. 基本概念

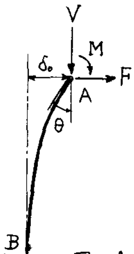


図-1

主塔の設計モデルは図-1のように塔頂Aが水平に変位δ_0を強制された状態で鉛直荷重Vを受ける柱とする。塔基部Bは固定されているものとする。この柱を幾つかの要素にわけた場合、各節点変位を$\{\delta\}$、節点力を$\{f\}$とすれば、一般にマトリックス法では剛性マトリックス$[K_0]$を用いて、式(1)を解くことによって変位が求められる。

$$[K_0]\{\delta\}-\{f\}=\{\psi\}=0 \quad \cdots(1) \qquad [K(\delta)]\Delta\{\delta\}=-\{\psi\} \quad \cdots(2)$$

行列$[K_0]$は$\{\delta\}$の関数であり、計算は逐次近似を必要とするが、$\{\delta\}$の修正値$\Delta\{\delta\}$は式(2)を計算することで得られる。しかし荷重が主塔の耐荷力に一致した状態では$\{\delta\}$がこの系の固有関数に一致する結果、$[K(\delta)]$の行列式はゼロに一致し、$\Delta\{\delta\}$は不定になる。耐荷力に達しなくても、その近傍では$[K(\delta)]$はいわゆるタチの悪い行列となり、計算精度が極めて悪くなり、同時に収束性が低下することになる。

この点を改善するためには、問題とする荷重をその系の固有値から遠ざけることにすればよく、これを達成する為にこの系に拘束を加えようと言うのが本法における考え方である。加える拘束は結果に影響するようなものであってはならないが、その範囲では何をとっても良い。ここでは便宜上載荷端Aの回転角θとした。すなわち、新しくθを外的に拘束する変位とし、その為の反力M_Aがゼロになるような鉛直荷重Vを求めれば、これが所要のV～θ関係を与えることになる。

3. 計算方法

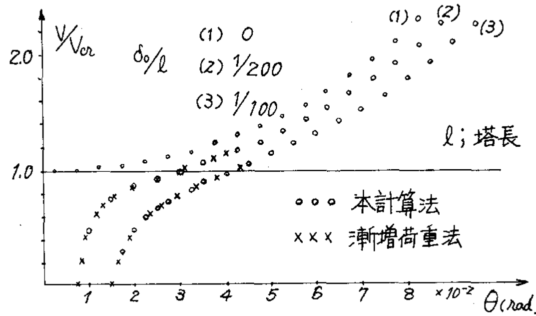
計算はNewton-Raphson法によって行うことにしたが、この点について特に問題はない。しかし、上記のようにθを与えて荷重Vを変えながら反力M_Aを求め、$M_A=0$になるようにVの値を逐次近似法で求めることにするとその為の計算回数が増加し、本計算法の利点が減殺されてしまう恐れがある。

そこで、塔頂回転角を強制することにより通常の方法では境界条件として取り除かれる式を残し、鉛直荷重Vを新しく未知数に加えることとした。すなわち反力M_Aを既知数として直接θからVを求める方法を採用した。係数行列$[K(\delta)]$にこのような操作を加えることによってその性質を悪化させる恐れが無いわけではないが、弾性柱に関して例題を扱った範囲では、その傾向は生じなかった。

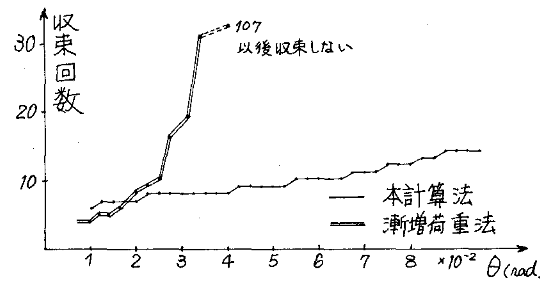
4、計算例

計算は図－1のような系について試みた。ここでは計算方法の収束性と精度を見ることを目的としたため、系は終始弾性範囲内にあるものとした。この系は$\delta_0=0$とすれば1端固定1端ピンの柱であるから、座屈荷重V_{cr}は　$V_{cr}=\pi^2 EI/(0.7\ell)^2$
で与えられる。そこでV/V_{cr}と塔頂回転角θの関係を求めた。結果は図－2に例示した通りであり、$V \doteqdot V_{cr}$付近では計算上ほとんど問題を生じない。極端な場合として$\delta_0=0$の場合にも、$\theta \neq 0$の範囲ではよい結果が得られる。

同じ問題を荷重漸増法によって解き、その収束回数を比較したのが図－3である。荷重Vの小さい所では通常の荷重漸増法の方が収束はよいが、荷重が増加し、V/V_{cr}が1に近ずくに従って荷重漸増法では急速に収束が悪くなるのに対し、ここに紹介した方法ではその範囲で収束性の悪化が見られないことが明らかであろう。



図－2　荷重漸増法と本法による計算値



図－3　収束回数の比較（$\delta_0/\ell = 1/200$）

先に述べたように、この計算法では塔頂回転角を固定することによって最小固有値を高めているので、塔頂を固定とした系の固有値に荷重が近ずけばその利点は失われ、収束性が悪化すると考えられたが、実際にはその状態で収束の悪さは生じなかった（図－3）。これはVを未知数として係数行列に加えたためにその性質が変化し、固有値がさらに上昇したためと思われる。

なお、本計算はFACOM 270－30を用い、収束判定は$\Delta V/V < 10^{-10}$とした。

5、まとめ

吊橋主塔の耐荷力を求めるための計算方法の改善を目的として、拘束条件を追加して係数行列の特性を改善し、外力を未知数として扱う方法を検討した。その結果収束性を極めて改善できることが確かめられた。この方法は他の構造物の初期曲がりのある問題を扱う場合にも有効であろう。

6、あとがき

ここでは大変形に起因する幾何学的非線形問題に対して座屈荷重付近に生ずる収束性の悪化原因を取り除くことの可能性を問題にしたため、弾性モデルを用いた。しかし実用上は非弾性座屈を扱うことが極めて重要であると考えられるので、現在材料的非線形を加味した計算例を検討中である。

参考文献

1）「吊橋主塔設計要領（案）」　本州四国連絡橋公団　昭和47年9月
2）O.C.Zenkiewicz　"The Finite Element Methord in Engeneering Sience"　McGRAW-HILL Co. 1971
3）国広哲男、藤原稔、井刈治久「吊橋主塔の弾性解析と設計上の問題点」土木技術資料14-4　昭和47年4月
4）国広哲男、藤原稔、井刈治久「吊橋主塔の極限耐荷力」　土木技術資料14-5　土木研究会　昭和47年