

I-3 連続体の有限変形に関する一考察

北海道大学 正員 横道 英雄  
同 正員 〇佐伯 昇

要旨 任意の曲面を有する連続体の有限変形に関し、テンソル解析を用いて考察する一般基礎式について述べ、その応用例として非圧縮性の曲線材の曲げの問題についての解法を示したものである。

基礎式 一般に連続体の有限変形すなわち大変形の問題では、物体と一緒に移動する座標系を用いる。図-1で、 $B$ は時点 $t_0$ における連続体で、その一点 $P$ は曲線座標 $X^i$ で表わされるが、これに関する直交直線座標 $Y^a$ の原点 $O$ からの位置ベクトル $R^a$ をもつ。時点 $t > t_0$ で物体は $B'$ に移動変形を行なうが、点 $P$ は $P'$ に移り、曲線座標 $X^i$ で表わされ、直交直線座標 $Y^a$ に関する位置ベクトル $r^a$ をもつものとする。 $X^i$ は固定したままに material coordinates といわれ、 $x^i$ は移動して spatial coord. といわれる。 $X^i$ と $x^i$ の間には $x^i = x^i(X, t)$  および $X^i = X^i(x, t)$  が成立するものとする。 $B$ および $B'$ における

近接2点間の距離 $dS, ds$ はそれぞれテンソル表示で

$$(1) \begin{cases} dS^2 = g_{mn}(X) dX^m dX^n, & ds^2 = g_{mn}(x) dx^m dx^n \\ g_{mn}(X) = R_m^i \cdot R_n^i, & g_{mn}(x) = r_m^i \cdot r_n^i \quad (\text{summend on } i) \\ R_m^i = \partial Y^i / \partial X^m, & r_m^i = \partial Y^i / \partial x^m \end{cases}$$

で表わされる。 $R_m^i, r_m^i$ は基本ベクトル、 $g_{mn}$ は計量テンソルと呼ばれる。但し $g_{mn}(X)$ と $g_{mn}(x)$ とは座標系が異なるので、前者を Cauchy-Green の変形テンソル

(2)  $G_{rs}(x, t) = X_s^m X_r^n \cdot g_{mn}(X)$  に変換しておく。但し  $X_s^m = \partial X^m / \partial x^s$  の略。

(3)  $e_{ij}(x, t, t_0) = \frac{1}{2} (g_{ij}(x) - G_{ij}(x, t, t_0))$  …… 共変ひずみテンソル。

つぎに断熱変化のエネルギ-方程式は、混合応力テンソルを $\sigma_j^i$ 、混合ひずみ速度テンソルを $\dot{e}_j^i$ とするとき

(4)  $(\rho/\rho_0) \partial W / \partial t = \sigma_s^r \dot{e}_r^s$  ( $\rho$  = 密度,  $W$  = 内部エネルギー), 非圧縮性の場合

(5)  $\sigma_j^i = -p \delta_j^i + 2 \frac{\partial W}{\partial I} G_j^i - 2 \frac{\partial W}{\partial II} G_j^i$  I II III は strain invariants

(6)  $I = G_j^i \delta_j^i, II = \frac{1}{2} [I^2 - G_j^i G_j^i], III = |G_j^i|$ . つぎに運動方程式は

(7)  $\sigma_{ms}^{rs} = \partial \sigma_{ms}^{rs} / \partial t + \{m_s^r\} \sigma_{ms}^{rs} + \{m_s^r\} \sigma^{rs} = 0$  (加速度のない場合) また一般に

(8)  $\{m_{mn}^r\} = \frac{1}{2} g^{rp} [\partial g_{mp} / \partial x^n + \partial g_{pn} / \partial x^m - \partial g_{mn} / \partial x^p]$  …… Christoffel の第2種記号である。

応用例 図-2に示すような曲線材 $AB$ の曲げによって有限変形

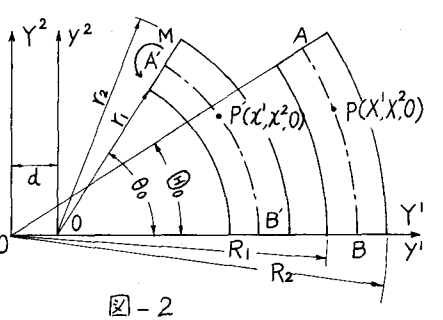
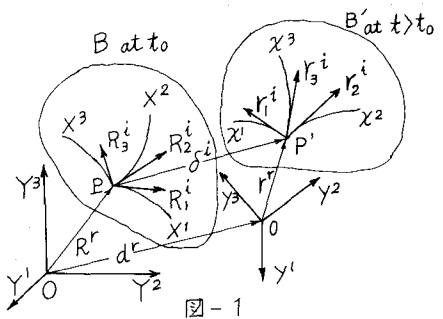
をおこした場合を取扱ってみよう。断面は矩形とし、 $X^1$ と $X^2$ はいずれも平面座標を用いるものとし、 $X^1 = R, X^2 = \theta, X^3 = Z,$

$x^1 = r, x^2 = \theta, x^3 = z, Y^1 = R \cos \theta, Y^2 = R \sin \theta, Y^3 = Z,$   
 $y^1 = Y^1 - d = r \cos \theta, y^2 = Y^2 - d = r \sin \theta, y^3 = Z$  とする、また

(9)  $x^1 = r = f_1(R), x^2 = \theta = f_2(\theta), x^3 = z = f_3(Z)$  とする。共変テンソルは

$$(10) (g_{rs}(X)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, (g_{rs}(x)) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

また  $X_r^1 = 1/f_r^1, X_s^1 = 0 (r \neq s), X_r^2 = f_r^2, X_s^2 = 0 (r \neq s)$  となるから Cauchy-Green



の変形テンソルは(2)式より

$$(10) \quad (G_S^r(x)) = \begin{pmatrix} \frac{1}{f_1^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{f_2^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{f_3^2} \end{pmatrix}, \quad (G_S^{-r}(x)) = \begin{pmatrix} f_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & f_2^2 \frac{R^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & f_3^2 \end{pmatrix} \quad \text{となる。} \quad \text{L.F.がって(5)式より } r = f_1 \text{ なることを考慮して}$$

(11)  $\mathbb{I} = (f_1 f_1' f_2' f_3' / R)^2$  を得る。非圧縮性体の場合とすると  $\mathbb{I} = 1$  となるので、...

$$f_1 f_1' = r r' = AR, \quad f_2' = \theta' = B, \quad f_3' = z' = C, \quad C = (AB)^{-1} \quad \text{とあくと}$$

$$r = (AR^2 + D)^{\frac{1}{2}} \quad \text{となる。さらに } R = R_1, R_2 \text{ のとき } r = r_1, r_2 \text{ であるから結局}$$

$$A = (r_2^2 - r_1^2) / (R_2^2 - R_1^2), \quad D = (r_1^2 R_2^2 - r_2^2 R_1^2) / (R_2^2 - R_1^2)$$

$$(12) \quad r = (AR^2 + D)^{\frac{1}{2}}, \quad \theta = B\theta, \quad z = CZ, \quad C = (R_2^2 - R_1^2) \theta_0 / (r_2^2 - r_1^2) \theta_0.$$

を得る。L.F.がって(10)式は

$$(13) \quad (G_S^r(x)) = \begin{pmatrix} \frac{r^2}{A^2 R^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R^2}{B^2 r^2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{C^2} \end{pmatrix}, \quad (G_S^{-r}(x)) = \begin{pmatrix} A^2 \frac{R^2}{r^2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{B^2 r^2}{R^2} & 0 \\ 0 & 0 & C^2 \end{pmatrix} \quad \text{となるので、}$$

Strain invariants は

$$(14) \quad \mathbb{I} = \frac{A^2 R^2}{r^2} + \frac{B^2 r^2}{R^2} + C^2, \quad \mathbb{II} = \frac{r^2}{A^2 R^2} + \frac{R^2}{B^2 r^2} + \frac{1}{C^2}, \quad \mathbb{III} = 1$$

L.F.がって(4)式から

$$(15) \quad \begin{cases} \sigma_r' = -p - \frac{2A^2 R^2}{r^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}} - 2 \frac{r^2}{A^2 R^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{II}} = \sigma_r^r \\ \sigma_\theta^2 = -p + \frac{2B^2 r^2}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}} - 2 \frac{R^2}{B^2 r^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{II}} = \sigma_\theta^\theta \\ \sigma_z^2 = -p + 2C^2 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}} - 2 \frac{1}{C^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{II}} = \sigma_z^z \end{cases}$$

を得る。また(7)式の Christoffel の記号は、この場合平面極座標であるから

$$\left\{ \begin{matrix} 1 \\ 22 \end{matrix} \right\} = -r, \quad \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 21 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{matrix} 2 \\ 12 \end{matrix} \right\} = \frac{1}{r} \quad \text{だけでこれ以外はすべて消失するので、} \quad \sigma_s^r = g_{sm} \sigma^{rm} \text{ の}$$

関係を利用して(6)式をつくらると

$$\frac{\partial \sigma_r^r}{\partial r} + \frac{\sigma_r^r}{r} - r \sigma_\theta^{\theta 2} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta^{\theta 2}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^z}{\partial z} = 0 \quad \text{となるので結局}$$

$$(16) \quad \frac{\partial \sigma_r^r}{\partial r} - \frac{\sigma_r^r - \sigma_z^z}{r} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_\theta^{\theta 2}}{\partial \theta} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_z^z}{\partial z} = 0 \quad \text{を得る。この式と(15)式とより}$$

$$(17) \quad -\frac{\partial W}{\partial r} = \frac{\sigma_r^r - \sigma_z^z}{r} \quad \therefore \sigma_r^r - W = -\text{定数} = L \quad \text{となる。L.F.がって(15)式は}$$

$$(18) \quad \begin{cases} \sigma_r^r = W + L, & \sigma_\theta^{\theta 2} = 2 \left( \frac{B^2 r^2}{R^2} - \frac{A^2 R^2}{r^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}} + C^2 \frac{\partial W}{\partial \mathbb{II}} \right) + W + L = r \frac{\partial W}{\partial r} + W + L \\ \sigma_z^z = 2 \left( C^2 - \frac{A^2 R^2}{r^2} \right) \left( \frac{\partial W}{\partial \mathbb{I}} + \frac{r^2 B^2}{R^2} \frac{\partial W}{\partial \mathbb{II}} \right) + W + L \end{cases}$$

$r = r_1, r_2$  の表面では  $\sigma_r^r = 0$  であるから、 $W(r_1) = W(r_2) = -L, \quad \mathbb{I}(r_1) = \mathbb{I}(r_2)$  となり

$$A = (B r_1 r_2) / (R_1 R_2), \quad C = (r_1 r_2) / (A R_1 R_2)$$

となり、また曲げモーメントは

$$(19) \quad M = \int_{r_1}^{r_2} r \sigma_\theta^{\theta 2} dr = \frac{1}{2} (r_1^2 - r_2^2) L - \int_{r_1}^{r_2} r W dr$$

となる。もし  $M$  および  $W$  が既知ならば  $r$  が求められる。ここで注目したいのは、単なる曲げの場合であるのにその面の直角方向の応力  $\sigma_z^z$  が生ずることである。これは Poynting 効果と呼ばれるものと同じである。