V-53　連続げたのクリープによる不静定力の一般式について

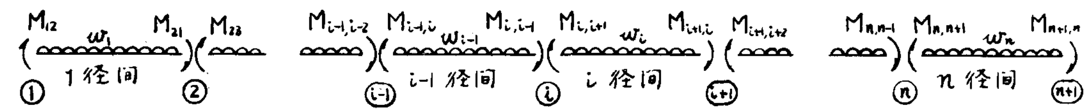
函館工業高等専門学校　正員　外崎　忍

1）　まえがき

コンクリート構造連続げたは多径間になると施工上の時間差から各径間のコンクリートのクリープ進行状態に差異を生じ、発生する不静定モーメントの解析は複雑になってくる。この解析方法は既に文献1）などに示されているが、本研究では撓角法の応用によって任意径間数、任意施工順序の連続げたに適用できる微分方程式を誘導し、又その解法は電算機の利用を考えマトリックスを応用した。

2）　微分方程式の誘導

この解析には次の事項を仮定した。イ）コンクリートの弾性係数は一定、ロ）鉄筋やPC鋼の拘束応力の影響は無視、ハ）クリープ関数は $\varphi_t = \varphi_n(1-e^{-xt})$，ニ）一つの径間は同時に施工される。



最後の荷重をかける径間に載荷した時間と1，2，・・・n径間目のコンクリートの養生が完了した時との時間差を夫々 $t_1, t_2 \cdots\cdots t_n$ とすると、i径間のクリープ関数は $\varphi = e^{-xt_i}\cdot\varphi_t$ となる。

今支点 i に着目し dt 時間の角変化 $d\theta_i$ を考え左右の桁端の撓角を等しく置くと次の様になる。

$$d\theta_i^l = \frac{1}{6EK_{i-1}}\Big[2dM_{i,i-1} - dM_{i-1,i} + 2M_{i,i-1}e^{-xt_{i-1}}d\varphi - M_{i-1,i}e^{-xt_{i-1}}d\varphi - \frac{6}{l_{i-1}}(L_{i,i-1} - L'_{i,i-1})e^{-xt_{i-1}}d\varphi\Big]$$

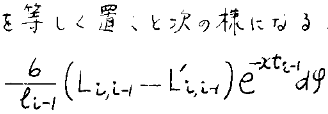
$$d\theta_i^r = \frac{1}{6EK_i}\Big[2dM_{i,i+1} - dM_{i+1,i} + 2M_{i,i+1}e^{-xt_i}d\varphi - M_{i+1,i}e^{-xt_i}d\varphi + \frac{6}{l_i}(L_{i,i+1} - L'_{i,i+1})e^{-xt_i}d\varphi\Big]$$

$$d\theta_i^l = d\theta_i^r,\quad -M_{i-1,i} = M_{i-1,i-2},\quad K_i = I_i/l_i,\quad m_i = K_{i+1}/K_i,\quad M_{i,i-1} = -M_{i,i+1}$$

$$m_{i-1}\frac{dM_{i-1,i-2}}{d\varphi} + 2(m_{i-1}+1)\frac{dM_{i,i-1}}{d\varphi} + \frac{dM_{i+1,i}}{d\varphi} + m_{i-1}e^{-xt_{i-1}}M_{i-1,i-2} + 2(m_{i-1}e^{-xt_{i-1}} + e^{-xt_i})M_{i,i-1}$$
$$+ e^{-xt_i}M_{i+1,i} - \frac{6m_{i-1}}{l_{i-1}}(L_{i,i-1} - L'_{i,i-1})e^{-xt_{i-1}} - \frac{6}{l_i}(L_{i,i+1} - L'_{i,i+1})e^{-xt_i} = 0$$

こゝで l_i，I_i はi径間の支間及び断面2次モーメントであり、$L_{i,i-1}$，$L_{i,i+1}$ はi支点の左右の桁端の死荷重による撓角，$L'_{i,i-1}$，$L'_{i,i+1}$ は $t=0$ における $i-1$，i，$i+1$ 支点モーメントによる撓角を示めす。これらは $M_i M_k$ 積分表で簡単に計算できる。例えば $(L_{ij} - L'_{ij})$ は次のようになる。

左側 $\dfrac{wl^3}{24} - \dfrac{l}{6}(2M_k^l + M_k^r)$　右側 $\dfrac{wl^3}{24} - \dfrac{l}{6}(2M_k^r + M_k^l)$



$M_{12}=0$，$M_{n+1,n}=0$ であるから、次のようにクリープにより発生する不静定モーメント $M_{i,j}$ に関する $n-1$ 箇の連立微分方程式が得られる。

$$2(m_1+1)\frac{dM_{21}}{d\varphi} + \frac{dM_{32}}{d\varphi} + 2(m_1e^{-xt_1} + e^{-xt_2})M_{21} + e^{-xt_2}M_{32} - m_1\frac{6}{l_1}(L_{21} - L'_{21})e^{-xt_1} - \frac{6}{l_2}(L_{23} - L'_{23})e^{-xt_2} = 0$$

$$m_2\frac{dM_{21}}{d\varphi} + 2(m_2+1)\frac{dM_{32}}{d\varphi} + \frac{dM_{43}}{d\varphi} + m_2e^{-xt_2}M_{21} + 2(m_2e^{-xt_2} + e^{-xt_3})M_{32} + e^{-xt_3}M_{43}$$

$$-\frac{6m_2}{\ell_2}(L_{32}-L'_{32})e^{-xt_2}-\frac{6}{\ell_3}(L_{34}-L'_{34})e^{-xt_3}=0$$

. . . .

$$m_{n-2}\frac{dM_{n-2,n-3}}{d\varphi}+2(m_{n-2}+1)\frac{dM_{n-1,n-2}}{d\varphi}+\frac{dM_{n,n-1}}{d\varphi}+m_{n-2}e^{-xt_{n-2}}M_{n-2,n-3}+2(m_{n-2}e^{-xt_{n-2}}+e^{-xt_{n-1}})\times$$

$$M_{n-1,n-2}+e^{-xt_{n-1}}M_{n,n-1}-\frac{6m_{n-2}}{\ell_{n-2}}(L_{n-1,n-2}-L_{n-1,n-2})e^{-xt_{n-2}}-\frac{6}{\ell_{n-1}}(L_{n-1,n}-L_{n-1\,n})e^{-xt_{n-1}}=0$$

$$m_{n-1}\frac{dM_{n-1,n-2}}{d\varphi}+2(m_{n-1}+1)\frac{dM_{n,n-1}}{d\varphi}+m_{n-1}e^{-xt_{n-1}}M_{n-1,n-2}+2(m_{n-1}e^{-xt_{n-1}}+e^{-xt_n})M_{n,n-1}-$$

$$\frac{6m_{n-1}}{\ell_{n-1}}(L_{n,n-1}-L_{n,n-1})e^{-xt_{n-1}}-\frac{6}{\ell_n}(L_{n,n+1}-L'_{n,n+1})e^{-xt_n}=0$$

上式の解 M_{21}, M_{32}・・・はn径間の連続げたが形成された時点から任意時間までのもので、多径間の連続げたでは、施工の段階毎に色々な形の連続げたが形成され、最後に全径間が連続となる訳であるから、途中の色々な連続げたの状態でのクリープによる発生モーメントを累計しなければならない。

但しどのような形の連続げたに対しても上式は次数と係数の値を変える丈で適用できる。

3）微分方程式の解法

表示を簡単にするため、上式の変数も係数も別な記号に置き換える。

$$f_{11}\frac{dx_1}{d\varphi}+f_{12}\frac{dx_2}{d\varphi}+\cdots+f_{1n}\frac{dx_n}{d\varphi}-a'_{11}x_1-a'_{12}x_2-\cdots-a'_{1n}x_n-b'_1=0$$

$$f_{12}\frac{dx_1}{d\varphi}+f_{22}\frac{dx_2}{d\varphi}+\cdots+f_{2n}\frac{dx_n}{d\varphi}-a'_{21}x_1-a'_{22}x_2-\cdots-a'_{2n}x_n-b'_2=0$$

. . . .

$$f_{n1}\frac{dx_1}{d\varphi}+f_{n2}\frac{dx_2}{d\varphi}+\cdots+f_{nn}\frac{dx_n}{d\varphi}-a'_{n1}x_1-a'_{n2}x_n-\cdots-a'_{nn}x_n-b'_n=0$$

$$\begin{bmatrix} f_{11} & f_{21} & \cdots & f_{1n} \\ f_{21} & f_{22} & \cdots & f_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ f_{n1} & f_{n2} & \cdots & f_{nn} \end{bmatrix}=F \qquad \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & \cdots & a'_{1n} \\ a'_{21} & a'_{22} & \cdots & a'_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a'_{n1} & a'_{n2} & \cdots & a'_{nn} \end{bmatrix}=A' \qquad \begin{bmatrix} b'_1 \\ b'_2 \\ \cdot \\ b'_n \end{bmatrix}=B'$$

$A=F^{-1}A'$, $B=F^{-1}B'$ とすれば、上式は $E\frac{dX}{d\varphi}=AX+B$ で表わされ、この一般解は、

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\varphi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2\varphi} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n\varphi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} C_1 \\ C_2 \\ \cdot \\ C_3 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

初期条件 $\varphi=0$, $x_1=x_2=\cdots=x_n=0$ を代入して、$C_1, C_2\cdots C_n$ を決定すると解は次のようになる。但し $\lambda_1\lambda_2\cdots\lambda_n$ は A に関する固有値であり、r_{ij} は夫々の固有ベクトルである。

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{n1} & r_{n2} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{\lambda_1\varphi} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & e^{\lambda_2\varphi} & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & e^{\lambda_n\varphi} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ r_{21} & r_{22} & \cdots & r_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ r_{n1} & r_{2n} & \cdots & r_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

文献 1）不静定コンクリート構造物においてクリープにより発生する不静定力の計算方法　猪股俊司　セメントコンクリート、2）マトリックス算法概説　柿原二郎　コンピューターによる構造工学講座