IV-84 マルコフ過程を用いた信号現示の最適化モデル

京都大学工学部 正員 佐佐木 綱

すべての街路区間に番号をつけ，i番目の街路区間（その区間長l_i）に存在する時刻tの車数を$N_i(t)$とする。実際には，その区間内の交通密度は一様ではない。なぜなら，信号機のために車群が形成されていたり，街路沿道に吸収されたり，発生してきたりする交通量があるからである。しかしながら本文では一様であると仮定しておく。

時刻tにおけるリンクiの中にある車の速度分布（従って空間速度分布）を$f_i(v,t)$で表わす。従って

$$N_i(t)=\int_0^\infty f_i(v,t)\,dv \quad , \quad i=1,2,\cdots j,\cdots k,\cdots \qquad (1)$$

区間iから流出する車は交差点によって他の街路区間jに移っていくであろう。交差点での右左折率が与えられている（複雑な交差点ではさらに多くの分岐率があるであろうが）とし，この推移確率をP_{ij}と表わす。当然のことながら $\sum_j P_{ij}=1$ である。

いま，tと$t+\Delta t$の間におけるi区間の車数変化を考えると

$$\int_0^\infty f_i(v,t+\Delta t)\,dv-\int_0^\infty f_i(v,t)\,dv=\sum_k P_{ki}\int_0^\infty \frac{v\cdot\Delta t}{l_k}f_k(v,t)\,dv-\int_0^\infty\frac{v\Delta t}{l_i}f_i(v,t)\,dv+\delta_i(t)\Delta t$$

が成立する。右辺第1項は時間Δtの間に，区間kからiに入ってくる車の数を示している。

第2項は区間iから流出する車数，第3項は区間iにおける沿道からの増減交通量である。上式の両辺をΔtで割り，$\Delta t\to 0$とすると左辺は$dN_i(t)/dt$であるから

$$\frac{dN_i(t)}{dt}=\sum_k\frac{P_{ki}}{l_k}\bar{v}_k(t)N_k(t)-\frac{1}{l_i}\bar{v}_i(t)N_i(t)+\delta_i(t) \qquad (2)$$

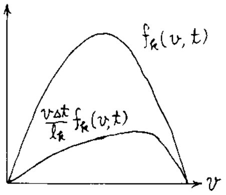

図-1

となる。ここに$\bar{v}_k(t)$は区間kにおける空間平均速度である。

一方，交通密度と空間平均速度との間には

$$\bar{v}_k(t)=F\{N_k(t)\} \quad , \quad d\bar{v}_k(t)/dN_k(t)<0 \quad , \quad \bar{v}_k(t)\geqq 0 \; , \; N_k(t)\geqq 0 \qquad (3)$$

なる関係がある。

以上の考察は，松井寛の研究を多少修正しながら進めたものであるが，彼の論文[1]においてはP_{ki}が時間tに無関係に一定としていることからもわかるように，交差点における信号現示が無視されており，信号サイクルよりもかなり長い時間にわたっての交通量分布を算定することになっている。

そこで，ある交差点における1つの分岐$k\to i$に対する推移確率$P_{ki}(t)$は，その分岐に対する現示が"青"の場合にのみある正の値をもち，"赤"の場合には0とならなければならない。すなわち，ある分岐に対する推移確率は図-2のように，サイクルCの周期関数になるであろう。

定常的な信号現示を仮定しているので，周期Cが入らざるをえない。

ここにa_{ki}およびb_{ki}は分岐$k\to i$に対する現示"go"の開始および終了時間である。このとき $0\leqq t\leqq C$ に対して

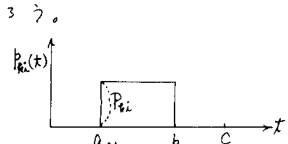

図-2

$$p_{ki}(t) = P_{ki}[U(t-a_{ki}) \times U(b_{ki}-t)]$$

で表わされる。ここに $U(t-a)$ および $U(b-t)$ はいずれもユニット関数である。また場合によっては図-3 に示すような場合も生じるが，このときは

$$p_{ki}(t) = P_{ki}[U(t-a_{ki}) + U(b_{ki}-t)]$$

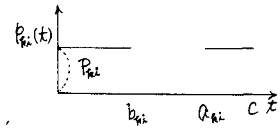

図-3

となり，a と b との関係は普通の場合は上記2ケースしか考えられないので，

$$p_{ki}(t) = P_{ki}[U(t-a_{ki}) * U(b_{ki}-t)] \qquad (4)$$

のように統一して表現することにする。ただし，記号 ＊ は $a>b$ のとき"+"，$a<b$ のとき"×"を意味する。また

$$p_{ki}(t) = \begin{cases} P_{ki} & \text{for all } t, \text{ if } a=b+ \\ 0 & \text{for all } t, \text{ if } a=b- \end{cases}$$

であり，$\sum_i P_{ki}=1$ であるにもかかわらず，$\sum_i p_{ki}(t)$ はいろいろと変化することに注意されたい。ただし，この値は 0 と 1 との間である。

このような推移確率を用いると，状態方程式は次のように書き直さなければならない。

$$\frac{dN_i(t)}{dt} = \sum_k \frac{p_{ki}(t)}{l_k} V_k(t)\, N_k(t) - \sum_j \frac{p_{ij}(t)}{l_i} V_i(t)\, N_i(t) + s_i(t) \qquad (5)$$

信号制御にあたって最も重要な制約条件は行列長であるから，

$$N_i(t) \leqq l_i B_i K_J \quad , i=1,2,\cdots j,\cdots k,\cdots \qquad (6)$$

を付加する必要がある。ここに B_i は区間 i の車線数であり，K_J は停滞時の交通密度である。

考えている制御地域内での信号サイクルがすべて等しいとすると，t を十分大きくとった定常状態では $N_i(t)$ はサイクル C の周期関数となってくるであろうから，1つの目的関数として，単位時間あたりの台キロ最大を考えることができる。すなわち

$$\frac{1}{C}\sum_i \int_0^C V_i(t)\, N_i(t)\, dt \longrightarrow max \qquad (7)$$

もしまた台時最小を目的関数とするならば，区間 i の所要時間は $l_i/V_i(t)$ であるから，

$$\frac{1}{C}\sum_i \int_0^C \frac{l_i N_i(t)}{V_i(t)}\, dt \longrightarrow min \qquad (8)$$

を採用すればよい。最適信号現示の問題は，ある初期値 $N_i(0)$, $i=1,2,\cdots j,\cdots k\cdots$ および $s_i(t)$ に対して，これらの目的関数を最大もしくは最小にするサイクル C および一連の現示 $\{a_{ij}, b_{ij}\}$ $(i \neq j)$ を求める問題となる。制約条件式は式(3)～(6)である。実際のネットに適用する場合には，以上の制約条件のほかに，各交差点における実現可能な現示パターンからもたらされる $\{a_{ij}, b_{ij}\}$ の間の拘束条件が付加されなければならない。たとえば，ある現示が"go"であれば他の現示は"stop"というような関係である。オフセットも $\{a_{ij}, b_{ij}\}$ の群の中で定義されるものであるから，かなりの実際的知識を，拘束条件の設定に生かすことができ，数値計算時間の短縮に役立ちうるであろう。

1) 松井寛，Theory of Traffic Distribution through the Continuos-Time Absorbing Markov Process，名工大学紀要，1969