IV-47　都市における給配水施設の拡張計画モデルについて

京都大学工学部　正員　春名 攻
京都大学工学部　正員　○岡田憲夫

1. はじめに

近年，都市の発展はめざましく，それにともない水需要が急激に増大している。この需要を満たしていくためには水道施設等の水供給施設の拡張をはかる必要がある。しかし，従来，わが国の水道施設の拡張方法は，年々増加していく水需要に対して，その場しのぎの対策を立てていくという需要追随型の形態をとることが多い。これは水道施設の建設の事業が各市町村単位で運営されていることによるが，投資効率の点からみてきわめて非効率であるとともに，水不足という事態を招く恐れもある。したがって今後においては，効率的な水道事業方式の確立をはかるとともに，資金面からの実行可能性を保証していくための長期にわたる段階的な拡張計画を策定していくことが必要になる。本研究は，このような観点に立って広域水道方式をとった場合の水道施設の拡張計画の問題を数学モデルによって定式化するとともに，実証例をとおしていくつかの側面からの分析を行なったものである。なお定式化されたモデルの解を求めることもかなり複雑であるので，ここではその解法についても詳述することにする。

2. モデルにおける仮定

①各期間において対象地域全体の全供給能力は全需要量を満たす。

②諸都市間に全期間を通じて必要となる最大の送水量が供給できるような送水管を計画対象期間の期首に布設することにより，供給能力に余裕のある都市から不足の都市へ送水を行なう。

③対象都市全体で必要とされる取水量は全て確保されている。

④給水の最終的な対象としては，各都市の配水池までとし，末端の給水は対象としない。

3. モデル化

（記号）

k, l：都市を表わすインデックス，M：対象都市の数

i, j：期間のインデックス（$i, j=1, 2, \cdots, n$），

T：計画対象期間の年数，n：計画対象期間の期数

T_α：各期間長（等長とする。）（$T=nT_\alpha$），

x_i^k：期間 i 都市 k で建設される浄水場の拡張規模（変数）

y_i^{kl}：期間 i において，都市 k（$k\in A_i$）から都市 l（$l\in \bar{A}_i$）への送水量，A_i：期間 i において供給能力に余裕能力に余裕のある都市の集合，$\bar{A}_i$：期間 i において供給能力に不足のある都市の集合，$D^k(i)$：都市 k，期間 i の需要量（i の関数），$C(x_i^k)$：都市 k，期間 i の浄水場の建設費（x_i^l の関数），$O(w_i^k)$：都市 k，期間 i の浄水場の維持管理費（T_α 年当り）（w_i^k の関数），ここに w_i^k は，

$$w_i^k\begin{cases} D^k(i)+\sum_l y_i^{kl} & \text{for } k\in A_i,\ l\in \bar{A}_i, \\ D^k(i)-\sum_l y_i^{lk} & \text{for } k\in \bar{A}_i,\ l\in A_i, \end{cases}$$

$K(\hat{y}^{kl})$：都市 $k-l$ 間の送水管の建設費（$\hat{y}^{kl}$ の関数），ここに $\hat{y}^{kl}=\max_i\{y_1^{kl}, y_2^{kl}, \cdots, y_i^{kl}, \cdots y_n^{kl}\}$，$P(y_i^{kl})$：都市 $k-l$ 間，期間 i の送水管の維持管理費（$k\in A_i$，$l\in \bar{A}_i$）

（制約条件の定式化）

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{j} x_i^k \geqq D_j^k+\sum_l y_j^{kl}\ (k\in A_i,\ l\in \bar{A}_i),\ (j=1,2,\cdots,n), \\ D_j > \sum_{i=1}^{j} x_i^k \geqq D_j^k-\sum_l y_j^{lk}\ (k\in \bar{A}_i,\ l\in A_i),\ (j=1,2\cdots,n), \\ \sum_{i=1}^{j}\sum_{k=1}^{M} x_i^k \geqq \sum_{k=1}^{M} D_j^k\ \ (j=1,2,\cdots,n) \end{cases}$$

（評価関数の定式化）

評価の対象とすべき費用は前記の費用の総和とするよりはむしろ維持管理費をも含めた計画対象期間全体の総償還額を用いる方が妥当である。これは，一般に水道事業体が施設の拡張を行なうにあたっては，その資本の大部分を借入債によっており，事業体の関心はむしろこの借入債の償還額にあることによる。さらにこの償還額を用いれば施設の遊びに対する機会損失費用をも評価することができ合理的である。一般に公共事業体の償還方法には定額法が用いられるので，以下においてはこの方法を採用し，建設費の償還額を求める。このとき資本回収係数は次式で表わされる。

$$g(r)=\frac{r(1+r)^m}{(1+r)^m-1}\quad (m=30,\ r：借入資本の年利率)$$

したがって期間iの期首に建設された浄水場の償還額は、計画対象期間全体では以下のように表わされる。

$S(x_i^k, i) = (n-i+1)\cdot \tau_\alpha \cdot \frac{r(1+r)^{30}}{(1+r)^{30}-1}\cdot C(x_i^k)$, ここに、

$S(x_i^k, i)$：都市k、期間iに建設された浄水場の年償還額のうち、$i=i$から$i=n$までの総和，また送水管の建設は計画対象期間Tの期首に行なわれるので、この建設費の償還額は期間T全体では以下のように表わされる。

$R(\hat{y}^{kl}) = n\cdot \tau_\alpha \cdot \frac{r(1+r)^{30}}{(1+r)^{30}-1}\cdot K(\hat{y}^{kl})$, ここに，

$R(\hat{y}^{kl})$：都市k-l間の送水管の建設費のうち、$i=i$から$i=n$までの総和，したがって計画対象期間全体の償還額と維持管理費の地域全体での総和をとることにより、目的関数はつぎのように表わされる。

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{M} S(x_i^k, i) + \sum_k\sum_l R(\hat{y}^{kl}) + \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{M} O(w_i^k) + \sum_{i=1}^{n}\sum_k\sum_l P(y_i^{kl})$$

ゆえに問題はZを最小にするx_i^k, y_i^{kl} ($i=1,2,\cdots,n$; $k,l=1,2,\cdots,M$)の値を求めればよいことになる。

定式化されたモデルは非線形計画問題(NP)になっている。しかしながらモデルにおける変数の値がかなり多いため、その解法はかなり複雑である。以下では本モデルを列挙法ならびにダイナミックプログラミング(DP)の手法による解法について説明する。

4、解法

(列挙法による解法)

実際問題では、浄水場の規模のうち妥当と考えられる最小単位の規模Δ、ならびに規模の上限x_{max}が設定される。(たとえば$x_{max}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{M} D_i^k$)、そこで、変数$x_i^k$, y_i^{kl}は制約条件を満たすすべての値の集合を意味しているが、計算にあたっては有限格子により仮定される値のみを用いることにする。y_i^{kl}の値はx_i^kの値を決めてやるとその範囲が限定されるので、y_i^{kl}についても妥当な上限値y_{max}と有限格子の大きさδが設定される。すなわち、$x_i^k=0, \Delta, 2\Delta, \cdots, R\Delta \leq x_{max}$, $y_i^{kl}=0, \delta, 2\delta, \cdots, r\delta \leqq y_{max}$. この場合、変数$x_i^k$の値の組み合わせの数は、全部で$(R\Delta)^{nM}$とおりある。このことは都市の数M、期間の数$n$が増加したとき、$x_i^k$の値の組み合わせの数は、指数的に増大することを示している。これは、y_i^{kl}の場合についても同じことがいえる。すなわち、この列挙法が有効なのは、M, nが小さいときのみに限られており、M, nが大きいときにはDPの手法を導入する必要がある。

(DPによる解法)

まず目的関数Zをつぎのように書き換える。

$$Z = \sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{k=1}^{M} S(x_i^k, i) + \sum_k\sum_l R(y_i^{kl}) + \sum_{k=1}^{M} O(y_i^k) + \sum_k\sum_l P(y_i^{kl})\right\}$$

ここに、$R(y_i^{kl}) = \begin{cases} 0, & \text{for } i=1,2,\cdots,n-1 \\ R(\hat{y}^{kl}), & \text{for } i=n \end{cases}$

$y_i^k = (y_i^{k1}, y_i^{k2}, \cdots, y_i^{kl}, \cdots, y_i^{kn})$, いま

$$Z_j(x_j, Y_j) = \min \sum_{i=1}^{j}\left\{\sum_{k=1}^{M} S(x_i^k, i) + \sum_k\sum_l R(y_i^{kl}) + \sum_{k=1}^{M} O(y_i^k) + \sum_k\sum_l P(y_i^{kl})\right\}$$

とおく。ここに、$\begin{cases} x_j = (x_j^1, \cdots, x_j^M) \\ Y_j = {}^t(y_i^1, y_i^2, \cdots, y_i^k, \cdots, y_i^M) \end{cases}$

このとき、最適性の原理により、

$$Z_j(x_j, Y_j) = \min\left[\left\{\sum_{k=1}^{M} S(x_j^k, j) + \sum_k\sum_l R(y_j^{kl}) + \sum_{k=1}^{M} O(y_j^k) + \sum_k\sum_l P(y_j^{kl})\right\} + Z_{j-1}(x_{j-1}, Y_{j-1})\right]$$

と表わされる。ただし、

$$Z_1(x_1, Y_1) = \sum_{k=1}^{M} S(x_1^k, 1) + \sum_k\sum_l R(y_1^{kl}) + \sum_{k=1}^{M} O(y_1^k) + \sum_k\sum_l P(y_1^{kl})$$

さてDPによる解法のプロセスはつぎのとおりである。まず$j=1$のとき，$x_1^k=0, \Delta, \cdots, R\Delta \leq x_{max}$, $y_1^{kl}=0, \delta, \cdots, r\delta \leqq y_{max}$ ($k=1,2,\cdots,M$)の各値を制約条件に代入して，kがA_1に属するかどうかを判定するとともに，x_1^k, y_1^{kl}の値を決定する。そしてこれらの値を用いて$Z_1(x_1, Y_1)$を計算する。つぎに$i=2$のとき$Z_2(x_2, Y_2)$はx_2を決定すれば、前ステップの関数値$Z_1(x_1, 1)$を用いて直ちに決まる。以下同様にして$Z_j(x_j, j)$の値が漸化的に求められる。そしてこのステップを順次繰り返していけば、$j=n$で最適解が得られる。

このようにDPの手法を用いれば、最初にx_j, Y_jを選んでしまうと、そのx_jの選択を含む一切の政策をためさないで、$j-1$段階の過程に対する最適な政策だけをためせばよいことがわかる。したがって探索すべき組み合わせは大きく減少するので、n, Mが大きいときには、この方法が効率的である。

以上，本モデルが列挙法あるいはDPを用いて解く方法を示したが、都市の数n、期間の数nがきわめて大きい場合には、あらかじめDPや列挙法によりlocal optimumを求めておいた上で再度DPを用いることにより，より精度の高い近似解に到達することが可能である。講演時には、具体的な計算例を用いてモデルを説明するとともに、結果の分析とモデルの改善点について言及する。