

(株) 日本水道コンサルタント 正員 梶 武

〃 〃 〇 大 明 良 巳

〃 〃 中 村 正 久

〃 〃 山 地 弘

1. はじめに

年次単位における河川汚濁制御は、普通には、水質測度を状態変数、下水道整備レベルなどを操作変数と認識することにより2点境界値問題として把握しうる。このように認識すれば、「計画目標年次に水質基準を満足するためには、いつ、どこに、どの程度の下水道整備レベルをほりつけるか。」という問題の有効な情報を得ることが可能になると期待しうる。したがって、本研究の目的は、もし、計画目標年次の施設の空間的整備計画がすでに作成されているとした場合、⁽¹⁾ 時間的下水道整備レベルを空間に写像することにより、河川汚濁制御計画の空間的・時間的ダイナミックスを同時に記述しうるモデルの作成とその有効性を示すことにある。このとき状態変数のトラジェクトリは、ある年の状態の経年変化を示すことになる。なお、本研究では、水質測度としてBOD負荷量を採用し、さらに河川汚濁に直接的影響を及ぼす下水道の面的整備を操作変数とする。

2. モデルの定式化

ここでは、システム・モデルを提示し、カットなる概念を定義し、状態方程式を作成する。

2-1 システム・モデルとカットならびに流出負荷量

それぞれのシステム・モデルは、図-1の流域システムを下水道整備のために抽象化した図-2のような下水道整備システムの直列的・並列的あるいは分岐的な組み合わせとして把握される。なお、図-2において、 $w_i(t) \cdot A_i(t)$ は第*i*地区の7年次における計画発生負荷量(8/秒)で $(1 - u_i^a(t))$ は、いわゆる流達率である。なお、負荷量の流達は各地区とも1点で行なわれるものと以下仮定する。こうして、自然的、人為的カット負荷量を、つぎの両式のように定義する。

$$C_i^a(t) = u_i^a(t) \cdot w_i(t) \cdot \left\{ A_i(t) - A_i(T) \int_0^t u_i^a(t) dt \right\} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (1)$$

$$C_i^s(t) = w_i(t) \cdot A_i(T) \int_0^t u_i^s(t) dt \quad i=1, 2, \dots, N \quad (2)$$

ただし、 $u_i^a(t)$ は、計画目標年次(T)の計画発生汚水量に対する7年次の汚水の下水管への取入量の割合を示している。なお、(1)(2)両式では分流式を念頭においている。 $u_i^a(t)$: 人為的カット率
 $u_i^s(t)$: 自然的カット率

$$g_i^a(t) = (1 - k_i(t)) \cdot w_i(t) \cdot \left\{ A_i(t) - A_i(T) \int_0^t u_i^a(t) dt \right\} \quad i=1, 2, \dots, N \quad (3)$$

$$g_i^s(t) = k_i(t) \cdot w_i(t) \cdot A_i(T) \int_0^t u_i^s(t) dt \quad i=1, 2, \dots, N, \quad 0 \leq k_i \leq 1 \quad (4)$$

ここに $(1 - k_i)$ は、第*i*地区の処理プラントの除去率である。こうして第*i*地区の流出負荷量は、

図-1 流域システム

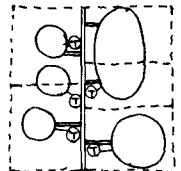
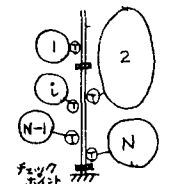


図-2 下水道整備システム

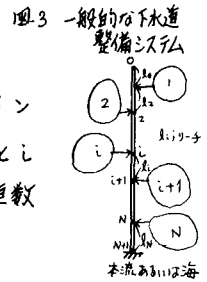


$w_i(t)$: 負荷強度(8/m²)

$A_i(t)$: 計画発生汚水量(m³/秒)

$$g_i(t) = (1 - u_i^a(t)) \omega_i(t) \left\{ A_i(t) - A_i(T) \int_0^t u_i^a(t) dt \right\} + k_i \cdot \omega_i(t) A_i(T) \int_0^t u_i^a(t) dt \quad i=1,2,\dots,N, 0 \leq t \leq T \quad (5)$$

となる。



2-2 状態方程式、操作変数と評価関数

状態方程式を作成する前に、図-2に示される流出負荷量のバイチェーン・ポイントも1つの地区と考え(図-3)、このとき $A_i(t) \equiv 0$ ($0 \leq t \leq T$) とする。すると、 $(i-1)$ 点と i 点の負荷量の関係が、 u_{i-1} をこの2点のリーク、 λ_{i-1} を、このリークの反応速度恒数とすれば、次式のようになる。

$$x_i(t) = g_i(t) + x_{i-1}(t) \cdot \exp(-\lambda_{i-1} \cdot u_{i-1}) \quad (6)$$

ただし、 $x_i(t)$ は、 i 年次の i 点の負荷量[$g_i(t)$ 参照]を示すもので、以下これを状態変数とよぶ。また、 $A_i(t)$ 、 $u_i^a(t)$ は微分可能、 $\omega_i(t)$ 、 $u_i^a(t)$ 、 k_i は区分的に連続で、有限個の点を除いて微分可能と考えられるので、状態変数の各年次変化は、(6)式をもとにして微分し整理すれば、次式を得る。

$$dx_i(t)/dt = \sum_{m=1}^i (dg_m(t)/dt) \cdot \exp(-\sum_{j=m}^{i-1} \lambda_j \cdot u_j) \quad i=0,1,\dots,N+1 \quad (7)$$

ただし、 $\sum_{j=1}^{i-1} \lambda_j \equiv 0$ であるとする。つぎに $dg_i(t)/dt$ を(5)式より求め、これを(7)式に代入すれば、 $dx_i(t)/dt = \sum_{m=1}^i \left\{ -(du_m^a(t)/dt) \cdot \omega_m(t) + (1 - u_m^a(t)) (d\omega_m(t)/dt) \right\} \left\{ A_m(t) - A_m(T) \int_0^t u_m^a(t) dt \right\} + (1 - u_m^a(t)) \cdot \omega_m(t) \left\{ (dA_m(t)/dt) - A_m(T) \cdot u_m^a(t) \right\} + k_m \cdot A_m(T) \cdot \left\{ (d\omega_m(t)/dt) \int_0^t u_m^a(t) dt + \omega_m(t) \cdot u_m^a(t) \right\} \cdot \exp(-\sum_{j=m}^{i-1} \lambda_j \cdot u_j) \quad i=0,1,\dots,N+1 \quad (8)$

となり、これが任意の i 年次の負荷量変化を示す状態方程式である。この(8)式より、明らかに、 i 点の状態変化に影響を与えることのできる人為的要素は、 $u_i^a(t)$ 、 $d\omega_i(t)/dt$ 、 $dA_i(t)/dt$ ($i=1,2,\dots,i$) である。すなわち、下水道整備レベル、発生汚水量の水質規制、発生汚水量の規制が、われわれの場合の操作変数の候補となる。しかし以下においては、便宜的に、 $d\omega_i(t)/dt=0$ 、 $du_i^a(t)/dt=0$ ($0 \leq t \leq T$) とすれば、(8)式はつぎのように簡単になる。

$$dx_i(t)/dt = \sum_{m=1}^i \left\{ (1 - u_m^a(t)) \cdot \omega_m(t) \cdot \left\{ (dA_m(t)/dt) - A_m(T) \cdot u_m^a(t) \right\} + k_m \cdot A_m(T) \cdot \omega_m(t) \cdot u_m^a(t) \right\} \cdot \exp(-\sum_{j=m}^{i-1} \lambda_j \cdot u_j) \quad (9)$$

また、 $\omega_i(t)$ と $A_i(t)$ の制御は河川汚濁防止の立場から等価とみなしうから、 $A_i(t)$ のみを関数パラメータと考えることにより、以下では $u_i^a(t)$ のみを操作変数として考えることにする。すると $u_i^a(t)$ には、つぎのような制約条件がつく。

$$0 \leq \int_0^t u_i^a(t) dt \leq \alpha_i(t), \quad A_i(t) \geq A_i(T) \int_0^t u_i^a(t) dt \quad i=1,2,\dots,N \quad (10)$$

ここに、計画目標年次の発生汚水量に対する i 年次の市街化区域からの発生汚水量の割合を $\alpha_i(t)$ と考えれば、 $\alpha_i(t)$ は、汚水量からみた市街化成長を示すインデックスとなる。また(10)式の第2式は、計画発生汚水量以上の下水道整備は行なわないことを示している。

つぎに評価関数は種々考えられるが、自然の浄化力にも期待しつつ、しかも発生汚水量の大きい地区に優先的に下水道整備を行なうことを指示する次式を本研究では採用する。すなわち、

$$J = \int_0^T \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{dC_i(t)}{dt} \cdot (C_i^a(t) + C_i^b(t)) / (A_i(t) \cdot A_i(T) \cdot \omega_i(t) \cdot u_i^a(t) \cdot C_i \cdot \exp(R \cdot (T-i) \cdot t)) \right\} dt \rightarrow \max. \quad (11)$$

となる。ここに C_i は汚水取入れ建設単価[100万円/m³/秒]で、 R としは、それぞれ物価上昇率と金利率である。こうして、 $x_i(0)$ が調査などにより計測可能であること、 $x_i(T)$ のいくつかは水質基準に指定されるから、結局(8)式の状態方程式と(11)式の評価関数を1セットとする2点境界値問題として、われわれの河川汚濁制御計画モデルの定式化ができたことになる。

3. 事例

事例対象システムは、図-4に示すように施設計画と独立な9地区が河川によって結合されている。図-4では、シェック・ポイントが5箇所、負荷を直接本流へ流出する地区が第4、第6地区の2箇所ある。なお、ここでは、シェック・ポイントの負荷量を状態変数とし、支川の自浄作用は自然的カッタ率の中にたたみこまれているものとする。したがって(9)式を考慮することにより、シェック・ポイントの数、すなわち5つの状態方程式を作成することができ、さらに、(11)式の積分領域の上限を T から t に変えたものを第6着めの状態変数と定義する。そして、これを微分することにより、結局6つの状態方程式を得ることになる。

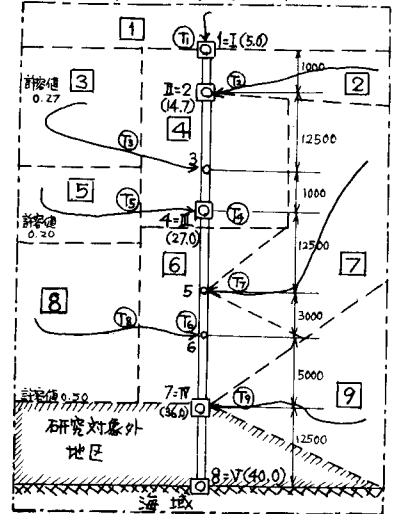
2.で示した定式化されたモデルを解くアルゴリズムとしては、一般にはダイナミック・プログラミングと最大原理が考えられるが、本事例では、最大原理を採用する。

さて、事例のための入力データは、図-4に示すリーク、シェック・ポイントの初期水質ならびに水質基準(x_i^0)、そして、表-1に示す、自然的カッタ率、負荷強度ならびに、計画発生活水量さらには図-5に示す計画市街化成長過程である。なお、(11)式の C_i としては、 $C_i = 53.8$ (for $\forall i$)としてある。これらのデータによると、第1, 2, 8地区の自然的カッタ率は極めて大きく、殆んど2次処理効率に達していることがわかる。また、計画発生活水量は、第6, 8, 9地区が卓越して大きく、この流域の発展の中核として期待されていることが明らかである。さらに第4地区は、汚水量からみた市街化が、現状でも極めて大きい。市街化速度がゆるやかであること、第9地区が急激な市街化の想定にたっていることなどが明らかとなる。

なお、本事例では、シェック・ポイント毎のブロック(たとえば、シェック・ポイントⅢ(=4)を例にとると第3, 4, 5地区)のどれかの地区の下水道整備を行なうのが好ましく、しかも、その整備レベルが $\alpha_i(t)$ に等しくなれば、他のブロック内地区のシェック・ポイントの負荷増加に対する寄与率の大きい地区の下水道整備を行ない、さらに、このブロックの努力にもかかわらず、

上流のこのブロックのシェック・ポイントの負荷量への影響が許容値を越えれば、上流の下水道整備を行なうという政策を採用していることを断わっておく。ただし、許容値は、初期の状態から算定

図-4 事例のためのシステム



□:地区番号 □:シェック・ポイント () :水質基準値
 (T):処理方式 II:本流 ↓:支流
 ---:地区境界 - - -:システムの境界
 N.B. 許容値とは、そのシェック・ポイントの負荷量に
 1つ上流のシェック・ポイントの負荷量が何%影響
 するを意味していることを示す指標である。

表-1 入力データ

i	$U_i(t)$	$W_i(t)$	$A_i(t)$
1	0.895	361.1	$0.020t + 0.402$
2	0.879	251.5	$0.022t + 0.797$
3	0.714	292.9	$0.007t + 0.279$
4	0.605	233.1	$0.021t + 0.890$
5	0.469	330.3	$0.005t + 0.005$
6	0.710	206.5	$0.073t + 0.935$
7	0.598	534.1	$0.012t + 0.090$
8	0.907	102.9	$0.108t + 1.286$
9	0.859	235.2	$0.140t + 1.007$

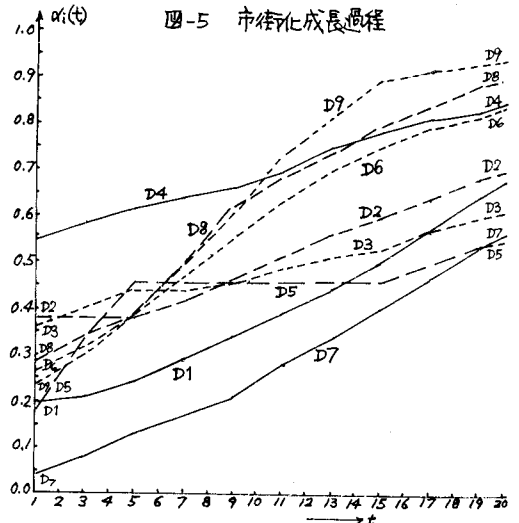


図-5 市街化成長過程

したものを図-4に示してある。

こうして上記入力データのもとで、 $T=20$ とした場合の最適トラジェクトリが図-6のように描かれ、そのときの最適下水道整備のほりつけが図-7のように示される。図-6によれば、 $x_1(t), x_2(t), x_4(t)$ は初年度から、 $x_3(t)$ は9年めから水質基準を守れなくなる。このとき第1, 8地区では下水道整備を一切行わないことが図-7より明らかとなる。これは、処理効率を0.9としたために、表-1に示すように、第1, 8地区の自然的カット率が0.895, 0.907のように0.9よりも大きいから、殆んど等しいことにあるものと思われる。つぎに図-8に示すように第1, 2, 3地区の計画発生生活水量を変え、さらに第4, 6, 8, 9地区に9年次から高級処理(処理効率0.95)を施せば、図-8に示される最適トラジェクトリと、そのときの最適下水道整備計画が図-9のように示され、この場合、計画目標年次の水質基準を満足する。図-7と図-9により、施設規模決定のための情報を得ることができたわけであるが、処理プラント、パイプなどの年次の規模決定問題は、両図に従うか、もしくは、両図を計画入力として、文献[2][3]を適用することにより解決され、さらに、この問題を(11)式の中に組みこむことも可能である。こうして、これらの情報を計画目標年次の空間的施設計画に写像することにより計画の時・空間ダイナミックスが記述されることになる。

4. おわりに

以上から、 $A_i(t)$ と水質基準値の算出根拠が別次元であるという事実を加味すれば、(水質基準が絶対的であるなり)処理技術の向上もさることながら、計画入力の制約を避けるわけにはいかないと結論しうるだろう。したがって、この種の制約が地域計画などによって、今後ますます大きくしてくるだろう。最後に京大教授吉川先生ならびに同助教授菅野先生の温かい御指導を感謝いたします。

参考文献

- (1) (株)日本水道コンサルタント「下水道系統設計計算の合理化に関する研究」昭和46年
- (2) 大門・中村「施設規模決定のための数学モデルに関する一考察」工学会年次学術講演会 昭和46年
- (3) 梶・平野・中村・大門「下水道整備計画の時空間サバシムとその統合に関する基礎的研究」本講演会で発表予定

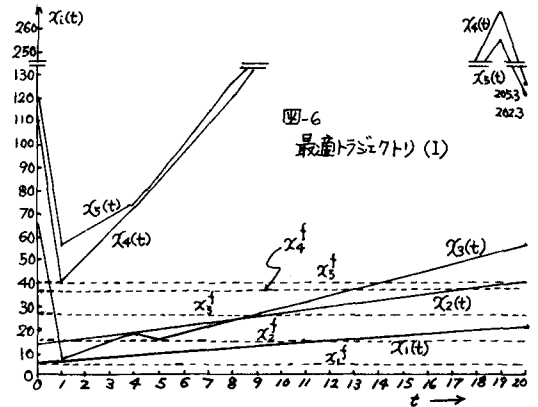


図-6 最適トラジェクトリ (I)

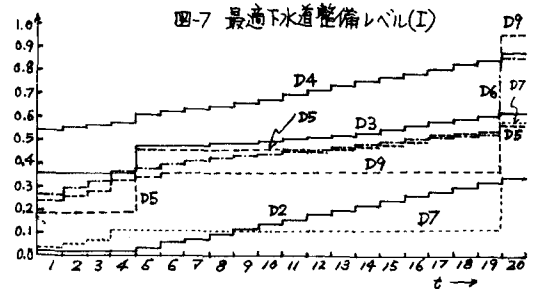


図-7 最適下水道整備レベル (I)

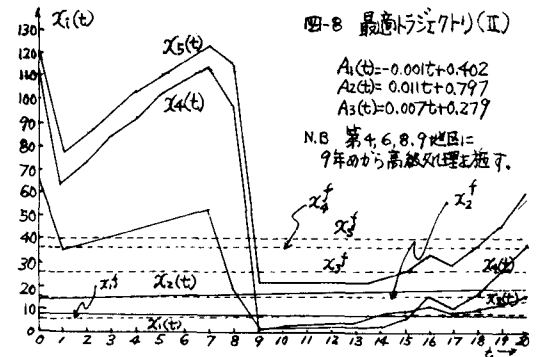


図-8 最適トラジェクトリ (II)

$A_1(t) = -0.001t + 0.402$
 $A_2(t) = 0.011t + 0.797$
 $A_3(t) = 0.007t + 0.279$
 N.B. 第4, 6, 8, 9地区は
 9年次から高級処理を施す。

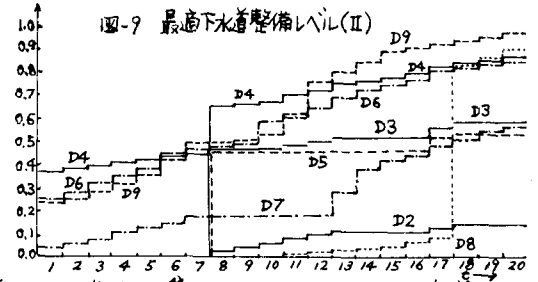


図-9 最適下水道整備レベル (II)