

1. まえがき

軸力を受ける単杭の水平抵抗に関しては、杭頭が自由の場合を対象として、複合地盤反力法¹⁾と同様な考え方にもとづいて誘導した弾塑性理論式とこれらの理論式を用いておこなった数値計算結果を既に報告している^{2), 3), 4)}。そこで今回は杭頭が固定されている場合を対象とした弾塑性理論式を誘導し、軸力の水平抵抗におよぼす影響などもみるために、弾性理論式、弾塑性理論式の両者を用いて、模型杭と模型地盤を対象として数値計算をおこない、定性的な傾向をみたのでそれらの結果を報告する。

2. 理論式の誘導

図-1に示されるごとく、杭頭が固定され、地上に突出していない単杭の杭頭に水平力 H と軸力 N が作用する場合、杭の周辺地盤が水平力と軸力の増大にともなって地表面から次第に降伏状態に達するものと考え、地盤反力を図-2に示すごとく、塑性域、弾性域においてそれぞれ $b\beta_1 x_1$ 、 bky_2 として与え、軸力 N の深さ方向 x の分布を杭頭から杭先端まで一定であると仮定すれば、両域における杭の挙動に関する基礎方程式は、 EI ：杭の曲げ剛性、 b ：杭の作用幅、 β_1 ：降伏地盤反力係数としてそれぞれ次式で与えられる。

$$\text{塑性域 } (x \leq x_p): EI \frac{d^4 y_1}{dx^4} + N \frac{d^2 y_1}{dx^2} + b\beta_1 x_1 = 0 \quad (1)$$

$$\text{弾性域 } (x > x_p): EI \frac{d^4 y_2}{dx^4} + N \frac{d^2 y_2}{dx^2} + bky_2 = 0 \quad (2)$$

式(1)、(2)の一般解を求めるとそれぞれに対して次式が得られる。

$$y_1 = C_1 + C_2 x_1 + C_3 \cos \alpha x_1 + C_4 \sin \alpha x_1 - \frac{b\beta_1}{6N} x_1^3 \quad (3)$$

$$y_2 = e^{-\alpha x_2} (C_5 \cos \gamma x_2 + C_6 \sin \gamma x_2) + e^{\alpha x_2} (C_7 \cos \gamma x_2 + C_8 \sin \gamma x_2) \quad (4)$$

式(3)、(4)において $A = \sqrt{N/EI}$ 、 $\alpha = \sqrt{\beta^2 - (N/4EI)}$ 、 $\gamma = \sqrt{\beta^2 + (N/4EI)}$ 、 $\beta = \sqrt{bk/4EI}$ 、 $C_1 \sim C_8$ は積分定数である。また、杭が無限長の場合

を対象とすれば、 $x_2 \rightarrow \infty$ において $y_2 \rightarrow 0$ になるので $C_7 = C_8 = 0$ となり、式(4)は結局次式(4')で示される。

$$y_2 = e^{-\alpha x_2} (C_5 \cos \gamma x_2 + C_6 \sin \gamma x_2) \quad (4')$$

ここで、杭頭 ($x_1 = 0$) における境界条件と塑性域と弾性域の境界 ($x_1 = x_p$ 、 $x_2 = 0$) における接続条件を考えると次式の式(5)、(6)が得られる。

$$(y_1')_{x_1=0} = 0, \quad (y_1''')_{x_1=0} + \frac{N}{EI} (y_1')_{x_1=0} = \frac{H}{EI} \quad (5)$$

$$(y_1)_{x_1=x_p} = (y_2)_{x_2=0}, \quad (y_1')_{x_1=x_p} = (y_2')_{x_2=0}, \quad (y_1'')_{x_1=x_p} = (y_2'')_{x_2=0}, \quad (y_1''')_{x_1=x_p} = (y_2''')_{x_2=0} \quad (6)$$

式(5)、(6)より積分定数 $C_1 \sim C_6$ を求めると次式の式(7)で示されるような結果が得られる。

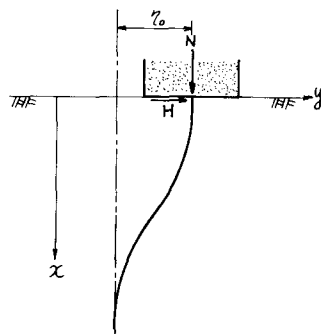


図-1 杭頭に水平力 H と軸力 N を受ける杭頭固定の単杭

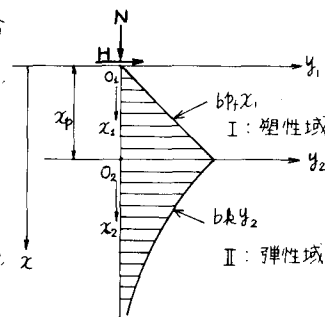


図-2 弾、塑性域と地盤反力

$$C_1 = Y_0 + \frac{1}{\Delta A} \left\{ \left[(Y^2 - 3\alpha^2)A^2 - 4\beta^4 \right] \bar{X} + 2\alpha A^3 \bar{Z} \right\} Y_0' + \left\{ -4\alpha\beta^2 \bar{X} + A(3\alpha^2 - Y^2 + A^2) \bar{Z} \right\} Y_0'' + \left\{ (A^2 - 2\beta^2) \bar{X} + 2\alpha A \bar{Z} \right\} Y_0''' \right\}$$

$$C_2 = \frac{1}{A^2} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right), \quad C_3 = \frac{2\beta^2}{\Delta A} (2\beta^2 Y_0' + 2\alpha Y_0'' + Y_0'''), \quad C_4 = -\frac{1}{A^3} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \quad (7)$$

$$C_5 = -\frac{1}{\Delta} \left\{ A \left\{ (3\alpha^2 - Y^2) \bar{X} - 2\alpha A \bar{Z} \right\} Y_0' + (Y^2 - 3\alpha^2 - A^2) \bar{Z} \cdot Y_0'' - (A \bar{X} + 2\alpha \bar{Z}) Y_0''' \right\}$$

$$C_6 = -\frac{1}{\Delta r} \left\{ A \left\{ \alpha(\alpha^2 - 3Y^2) \bar{X} + (Y^2 - \alpha^2) A \bar{Z} \right\} Y_0' - \alpha(\alpha^2 - 3Y^2 + A^2) \bar{Z} \cdot Y_0'' - \left\{ \alpha A \bar{X} + (\alpha^2 - Y^2) \bar{Z} \right\} Y_0''' \right\}$$

式(7)において

$$\Delta = 2\beta^2 \left\{ -2\alpha A \bar{X} + (A^2 - 2\beta^2) \bar{Z} \right\} \quad (\Delta = 0 : \text{座屈条件式})$$

$$Y_0 = \frac{bP_f}{6N} \chi_p^3 - \frac{1}{A^2} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \chi_p - \frac{1}{A^2} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \bar{Z}, \quad Y_0' = \frac{bP_f}{2N} \chi_p^2 - \frac{1}{A^2} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) + \frac{1}{A^2} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \bar{X} \quad (8)$$

$$Y_0'' = \frac{bP_f}{N} \chi_p - \frac{1}{A} \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \bar{Z}, \quad Y_0''' = \frac{bP_f}{N} - \left(\frac{H}{EI} + \frac{bP_f}{N} \right) \bar{X}, \quad \bar{X} = \cos A \chi_p, \quad \bar{Z} = \sin A \chi_p$$

また、地表面における杭の水平変位 Y_0 は $Y_0 = (y_1)_{x_2=0}$ 、杭頭拘束曲げモーメント M_0 は $M_0 = -EI(y_1'')_{x_1=0}$ 、両域における曲げモーメント M_1, M_2 は $M_1 = -EI(y_1'')$ 、 $M_2 = -EI(y_2'')$ の関係より次式で与えられる。

$$Y_0 = C_1 + C_3, \quad M_0 = N \cdot C_3, \quad M_1 = N \left(C_3 \cos A \chi_1 + C_4 \sin A \chi_1 \right) + \frac{bP_f}{A^2} \chi_1 \quad (9)$$

$$M_2 = -EI \cdot e^{-\alpha x_2} \left\{ \left\{ (\alpha^2 - Y^2) C_5 - 2\alpha r C_6 \right\} \cos r \chi_2 + \left\{ 2\alpha r C_5 + (\alpha^2 - Y^2) C_6 \right\} \sin r \chi_2 \right\}$$

地中部の最大曲げモーメントを生ずる位置 $\ell_{M_{\max}}$ は、塑性域で生ずる場合には $(y_1''') = 0$ を満足する x_1 として次式の式(10)で与えられ、弾性域で生ずる場合には $(y_2'') = 0$ を満足する x_2 に χ_p を加えたものとして式(11)で与えられる。

$$C_3 A^3 \sin A \ell_{M_{\max}} - C_4 A^3 \cos A \ell_{M_{\max}} - \frac{bP_f}{N} = 0 \quad (10), \quad \ell_{M_{\max}} = \frac{1}{Y} \left\{ \tan^{-1} \left\{ \frac{\alpha(\alpha^2 - 3Y^2) C_5 + Y(Y^2 - 3\alpha^2) C_6}{Y(Y^2 - 3\alpha^2) C_5 + \alpha(3Y^2 - \alpha^2) C_6} \right\} \right\} + \chi_p \quad (11)$$

また、曲げモーメント第1零点の位置 ℓ_{M_0} は式(9)の $M_2 = 0$ を満足する x_2 に χ_p を加えたものとして

$$\ell_{M_0} = \frac{1}{Y} \left\{ \tan^{-1} \left\{ \frac{(Y^2 - \alpha^2) C_5 + 2\alpha r C_6}{2\alpha r C_5 + (\alpha^2 - Y^2) C_6} \right\} + \pi \right\} + \chi_p \quad (12)$$

で与えられる。なお、塑性域の深さ χ_p は $P_f \chi_p / k = (y_1)_{x_1=\chi_p}$ 、あるいは $P_f \chi_p / k = (y_2)_{x_2=0}$ の関係より次式を満足する解として次式で与えられる。

$$\frac{P_f}{k} \chi_p - C_5 = 0 \quad (13)$$

3. 計算結果とその考察

軸力の水平抵抗におよぼす影響をみるために、2. で述べた弾塑性理論式と弾塑性理論式の χ_p, P_f を $\chi_p = 0, P_f = 0$ と置くことにより得られる弾性理論式の両者について数値計算をおこなった。計算

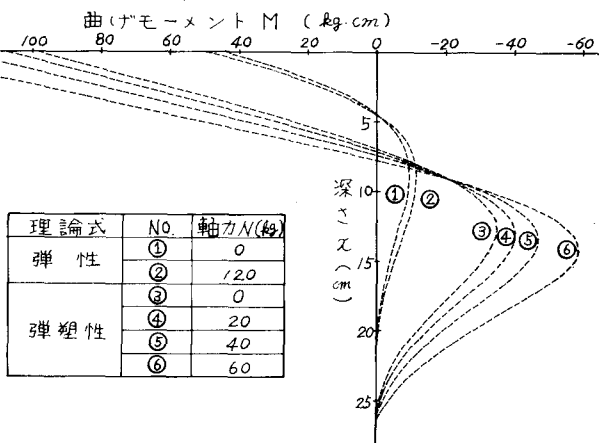


図-3 曲げモーメントの計算結果の1例 ($H=16 \text{ kg}$)

で対象とした杭は、奥行幅が1cm、作用幅が2cm、弾性係数Eが30000 kg/cm²の模型杭であり、地盤定数としては、弾性理論式については $k=10 \text{ kg/cm}^2$ の値を、弾塑性理論式については $\mu=0.1 \times \text{kg/cm}^2$ 、 $k=10 \text{ kg/cm}^2$ の値をそれぞれ採用し数値計算をおこなった。図-3は曲げモーメントの深さ方向における計算結果の1例を、表-1は杭頭拘束曲げモーメント、地中部最大曲げモーメント、最大曲げモーメントを生ずる位置、曲げモーメント第1零点の位置、地表面における杭の水平変位などの項目について同表に示されている軸力と水平力が作用した場合の計算結果を一括して示したものであり、図-4~図-8は表-1に示されている計算結果を各項目ごとに図示したものである。同図、同表よりその結果についてみると、弾性理論式を用いておこなった計算結果では、軸力NがN=0~60 kgへと増大するにつれて、N=0 kgの計算結果に対する比で、杭頭拘束曲げモーメントについては1.00~1.05、地中部最大曲げモーメントについては1.00~1.11、最大曲げモーメントを生ずる位置については1.00~1.01、曲げモーメント第1零点については1.00~0.97、地表面における杭の水平変位については1.00~1.05の値を示すが、この荷重の範囲では軸力の影響は小さなものと考えられる。これに対し、弾塑性理論式を用いておこなった計算結果では、杭頭拘束曲げモーメントについてはH=4 kgで1.00~1.10、H=8 kgで1.00~1.18、H=12 kgで1.00~1.29、H=16 kgで1.00~1.44、地中部最大曲げモーメントについてはH=4 kgで1.00~1.19、H=8 kgで1.00~1.31、H=12 kgで1.00~1.47、H=16 kgで1.00~1.70の値に示されるごとく、最大曲げモーメントを生ずる位置、地表面における

表-1 弾性理論式と弾塑性理論式の計算結果

理論式	軸力 N (kg)	水平力 H (kg)	杭頭拘束 曲げモーメント (kg·cm)		地中部最大 曲げモーメント (-kg·cm)		最大曲げモー メントを生ずる位置 (cm)		曲げモーメント 第1零点の位置 (cm)		地表面における 杭の水平変位 (cm)	
弾 性	0	4	11.247	1.00*	2.338	1.00*	8.833	1.00*	22.083	1.00*	0.0356	1.00*
		8	22.493	1.00	4.676	1.00	8.833	1.00	22.083	1.00	0.0711	1.00
		12	33.740	1.00	7.015	1.00	8.833	1.00	22.083	1.00	0.1067	1.00
		16	44.987	1.00	9.353	1.00	8.833	1.00	22.083	1.00	0.1423	1.00
	20	4	11.429	1.02	2.420	1.04	8.875	1.00	21.829	0.99	0.0361	1.02
		8	22.858	1.02	4.840	1.04	8.875	1.00	21.829	0.99	0.0723	1.02
		12	34.288	1.02	7.259	1.04	8.875	1.00	21.829	0.99	0.1084	1.02
		16	45.717	1.02	9.679	1.04	8.875	1.00	21.829	0.99	0.1446	1.02
	40	4	11.620	1.03	2.507	1.07	8.913	1.01	21.588	0.98	0.0367	1.03
		8	23.241	1.03	5.013	1.07	8.913	1.01	21.588	0.98	0.0735	1.03
		12	34.861	1.03	7.520	1.07	8.913	1.01	21.588	0.98	0.1102	1.03
		16	46.482	1.03	10.027	1.07	8.913	1.01	21.588	0.98	0.1470	1.03
	60	4	11.822	1.05	2.600	1.11	8.954	1.01	21.360	0.97	0.0374	1.05
		8	23.643	1.05	5.199	1.11	8.954	1.01	21.360	0.97	0.0748	1.05
		12	35.465	1.05	7.799	1.11	8.954	1.01	21.360	0.97	0.1122	1.05
		16	47.287	1.05	10.398	1.11	8.954	1.01	21.360	0.97	0.1495	1.05
弾 塑 性	0	4	15.152	1.00**	3.567	1.00**	9.006	1.00**	22.256	1.00**	0.0547	1.00**
		8	37.700	1.00	10.751	1.00	9.874	1.00	23.124	1.00	0.1761	1.00
		12	66.288	1.00	21.499	1.00	11.198	1.00	24.447	1.00	0.3962	1.00
		16	99.938	1.00	34.989	1.00	12.669	1.00	25.919	1.00	0.7390	1.00
	20	4	15.634	1.03	3.755	1.05	9.065	1.01	22.023	0.99	0.0565	1.03
		8	39.589	1.05	11.664	1.08	9.987	1.01	22.945	0.99	0.1888	1.07
		12	71.017	1.07	23.965	1.11	11.409	1.02	24.366	1.00	0.4408	1.11
		16	109.370	1.09	40.111	1.15	13.004	1.03	25.961	1.00	0.8547	1.16
	40	4	16.141	1.07	3.987	1.12	9.111	1.01	21.788	0.98	0.0590	1.08
		8	41.879	1.11	12.962	1.19	10.113	1.02	22.790	0.99	0.2042	1.16
		12	77.031	1.16	27.191	1.26	11.662	1.04	24.339	1.00	0.5003	1.26
		16	122.564	1.23	47.416	1.36	13.445	1.06	26.118	1.01	1.0276	1.39
	60	4	16.716	1.10	4.240	1.19	9.165	1.02	21.573	0.97	0.0616	1.13
		8	44.494	1.18	14.118	1.31	10.257	1.04	22.665	0.98	0.2235	1.27
		12	85.182	1.29	31.649	1.47	11.984	1.07	24.391	1.00	0.5861	1.48
		16	143.597	1.44	59.337	1.70	14.075	1.11	26.488	1.02	1.3300	1.80

* 弾性理論式: N=0, 20, 40, 60 kgの計算結果 / N=0 kgの計算結果

** 弾塑性理論式: N=0, 20, 40, 60 kgの計算結果 / N=0 kgの計算結果

杭の水平変位などについても水平力の増大にともなう影響が大きくなる結果となっている。また、曲げモーメント第1零点の位置については $H=4 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 0.97$, $H=8 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 0.98$, $H=12 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.00$, $H=16 \text{ kg}$ で $1.00 \sim 1.02$ の値であり、水平力が小さい場合には $N=0 \text{ kg}$ での計算結果より小さく弾性理論式を用いておこなった計算結果と似た傾向を示すが、水平力の増大にともなう $N=0 \text{ kg}$ での計算結果より大きくなるのが認められる。また、弾性理論式を用いておこなった計算結果と弾塑性理論式を用いておこなった計算結果とを比較すると、水平力が小さな場合には両者の計算結果には大きな差が認められないが、水平力が増大するにつれてかなりの差が生じる結果となっている。一ち、図-9は塑性域の深さ X_p の計算結果を図示したものである。塑性域の深さ X_p は軸力が $N=0 \sim 60 \text{ kg}$ と増大するにつれて、水平力が小さな場合には X_p の増加は小さなものであるが、水平力の増大につれて、その増加が大きくなる結果であり、水平力と軸力の増大にともなう地盤の非弾性的な性質が増大することになる。

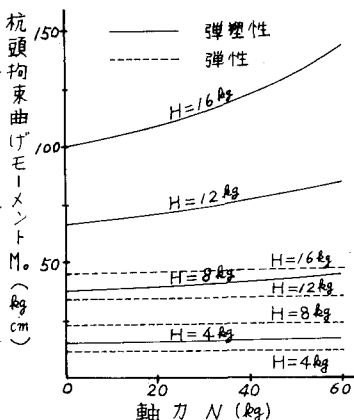


図-4 杭頭拘束曲げモーメント $M_{\max}$ と軸力 N の関係

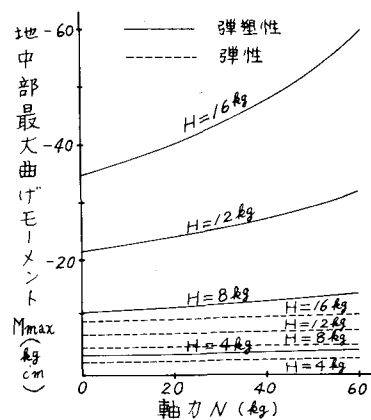


図-5 地中部最大曲げモーメント $M_{\max}$ と軸力 N の関係

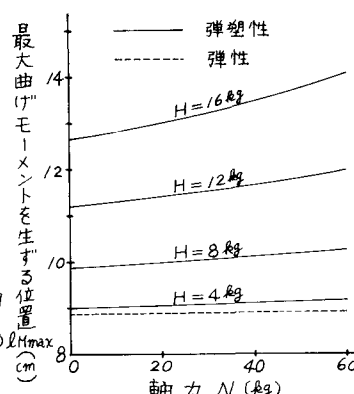


図-6 最大曲げモーメントを生ずる位置 $l_{M_{\max}}$ と軸力 N の関係

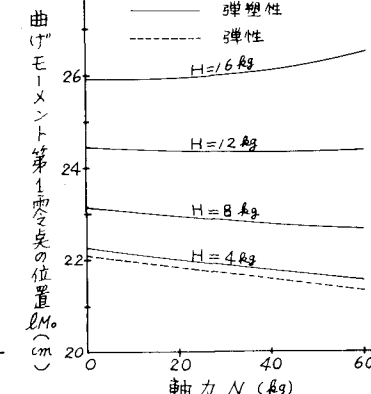


図-7 曲げモーメント第1零点の位置 l_{M_0} と軸力 N の関係

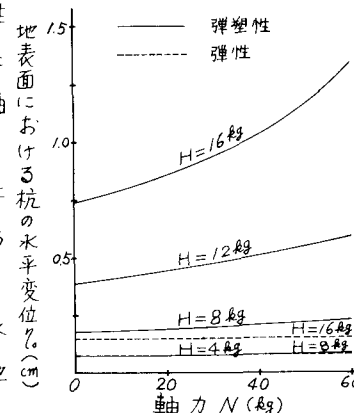


図-8 地表面における杭の水平変位 δ と軸力 N の関係

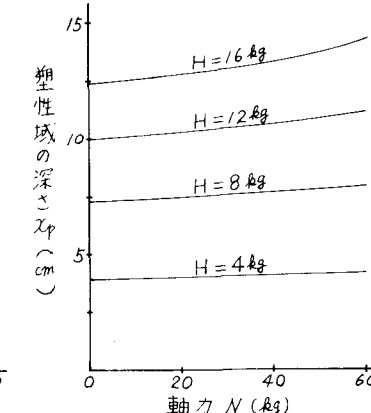


図-9 塑性域の深さ X_p と軸力 N の関係

参考文献

- 1) 土質工学会: 鋼管パイプ, p. 63 ~ 66
- 2) 西本安範: 軸力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究, 土木学会第26回年次学術講演会講演概要集, BB. 46. 10
- 3) 西本安範: 軸力と水平力を受ける単杭の水平抵抗に関する研究, 立命館大学理工学研究所紀要, 第21号, BB. 47. 1
- 4) 西本安範: 軸力を受ける単杭の水平抵抗について, 第7回土質工学研究発表会講演概要集, BB. 47. 6
- 5) 勝見雅・西本安範: 杭の水平抵抗に関する2.3の考察, 立命館大学理工学研究所紀要, 第17号, BB. 43. 12