

III-121 杭先端支持力に及ぼす地盤の塑性領域

名城大学 理工学部 土木工学教室 正会員 柴田道生

1. 緒言

杭が地盤に貫入する場合、地盤が破壊されるのは、杭先端より初まる。従つて、杭先端部の形態によつては、地盤の破壊領域形態も異なるのは、当然である。

杭先端部を扁平圧断面として、其の下方に楔形の土の塑性体を仮定した理論の構成は、地盤の塑性域を決める手段に用いられているが、実際の杭の先端部は、先端角を任意にもつ円錐部によつて構成されている。筆者は、このような実際の杭を対象として、先端角を任意に異にした場合の地盤の塑性域について理論解析を試みた。併せて、砂地盤を対象とした模型実験の結果と、よく一致することを確認した。

2. 杭先端断面における荷重と円錐先端の地盤応力 \$N_z\$。

(図1)において、EG, FG面に沿う土相互の摩擦角と \$T\$。

摩擦角の値を \$c_z\$ と示すと、ベラツツエフにより

$$c_z = \frac{\tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})}{\lambda - 1} \left\{ 1 - \left[\frac{1}{1 + \frac{z}{b_0} \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})} \right]^{\lambda - 1} \right\} \gamma L \quad (1)$$

$$\text{但し } \lambda = 2 \tan \varphi \tan(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi}{2})$$

$$T = 2c_z L \frac{c_z}{z}$$

$$b_0 = \frac{\pi(b_1^2 - r^2) L - T}{\pi(b_1^2 - r^2)}$$

ここで \$\varphi\$: 土の内部摩擦角, \$\gamma\$: 土の単位重量

$$\pi r^2 \gamma - \pi(b_1^2 - r^2) \gamma L$$

$$\varphi = \sqrt{2N} + 15^\circ$$

$$\pi r^2 \gamma = NA$$

\$N\$: 先端地盤の \$N\$ 値, \$A\$: 杭の断面積

$$\pi r^2 \gamma - T - F$$

この \$F\$ は \$AB\$ 断面に加はる荷重である。之等の式より \$L\$ を算定される。

次に先端角 \$\alpha\$ と有する \$i\$ にあつては、\$b_0\$ は次の(2)式で示される。即ち (図2)

$$b_0 = b_1 \frac{\cos(\mu - \varphi) \cos \varphi}{\cos \mu (1 - \sin \varphi)} e^{2(\frac{\pi L}{4} + \frac{\varphi}{2} - \mu) \tan \varphi} \quad (2)$$

杭先端円錐体と土、円錐体斜面に沿う剪断抵抗力 \$c\$ は、(図3)

$$c = \gamma L \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi$$

$$\text{原素より } x \text{ 軸方向 } x \text{ までの表面積 } S \text{ は } S = \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} 2\pi \int_0^x x dx \quad (3)$$

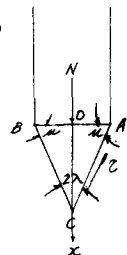
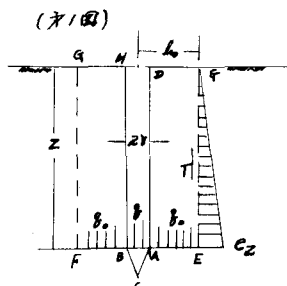
$$\text{従つて円錐体表面積が受くる剪断抵抗力 } c_s = \pi c \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} x^2 \quad (4)$$

$$x \text{ 軸方向任意の断面軸力 } N_x = N - \pi c \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} x^2 \quad (5) \quad (5) \text{ 式を } x \text{ で微分して}$$

$$\frac{dN_x}{dx} = -2\pi c \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} x, \quad \text{又、任意の断面の杭軸力と } N_x, \text{ 断面積を } A, \text{ 杭材の弾性係数}$$

$$\text{を } E, \quad x \text{ 軸方向の変位量を } \mu \text{ とすると、} -\frac{d\mu}{dx} = \frac{N_x}{AE} \quad x \text{ で微分して } \frac{dN_x}{dx} = -\frac{d\mu}{dx^2} AE$$

$$\text{従つて } \frac{d^2\mu}{dx^2} = \frac{1}{AE} 2\pi c \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} x \quad (6) \quad \text{もし } \frac{1}{AE} 2\pi c \frac{\sin \lambda}{\cos^2 \lambda} = a^2 \text{ (定数) とすると、}$$



従つて(5)式は $\frac{d^2\mu}{dx^2} - q\mu = 0$ ----- (6) となり、2階の線型微分方程式となる。

$x=0$ で $\mu=\mu_0$, $x=l$ で $\mu=\mu_l$ (但し l は $0<l<\infty$ である) の境界条件を入れて解くと。

$$\mu = -\frac{\mu_0 e^{-\beta} - \mu_l}{2\beta \sinh \beta} e^{q\mu} + \frac{\mu_0 e^{\beta} - \mu_l}{2\beta \sinh \beta} e^{-q\mu} \text{ ----- (7) } \quad \text{さて } x \text{ 軸方向, } x \text{ の位置の軸力 } N_x \text{ は 桁重}$$

N より、其の差でこの桁の剪断抵抗力と差引いた値に等しい。即ち(4)式を用いて。

$$N_x = N - 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda} \int_0^{\mu} \mu d\mu \quad \text{よって } 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda} = M \text{ とすると } N_x = N - M \int_0^{\mu} \mu d\mu \text{ ----- (8)}$$

$$(8) \text{式に (7) 式を代入して } N_x(N_\mu) = N - \frac{M}{\beta \sinh \beta} \left\{ \mu_0 \cosh \beta - \mu_0 \cosh \beta (1-m) + \mu_l (\cosh \beta m - 1) \right\} \text{ ----- (9)}$$

但し $\beta = al$, $m = \frac{\mu}{l}$ である。次に桁本体 AB 断面の変位 μ_0 は $\mu_0 = \mu_l + \frac{1}{AE} \int_0^l N_\mu d\mu$
積分限界 $\mu = 0$ で $m=0$, $\mu=l$ で $m=1$ 。従つて $\mu_0 = \mu_l + \frac{1}{AE} \int_0^l N_\mu dm$ ----- (10)

$$(10) \text{式に (9) 式を代入して } \mu_0 = \mu_l + \frac{1}{AE} \int_0^1 \left\{ N - \frac{M}{\beta \sinh \beta} \left[\mu_0 \cosh \beta - \mu_0 \cosh \beta (1-m) + \mu_l (\cosh \beta m - 1) \right] \right\} dm$$

積分して $\mu_0 = \mu_l + \frac{Nl}{AE} - \frac{l^2 M \cosh \beta}{AE \beta \sinh \beta} \mu_0 - \frac{Ml^2}{AE \beta^2 \sinh \beta} \mu_l \sinh \beta + \frac{C^2 M}{AE \beta \sinh \beta} \mu_l$ ----- (11)

$$\text{而して } a^2 = \frac{1}{AE} 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda} \quad M = 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda} \quad \beta = al = l \sqrt{\frac{1}{AE} 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda}}$$

$$\text{従つて } \frac{Ml^2}{\beta^2 AE} = \frac{l^2 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda}}{l^2 \frac{1}{AE} 2\pi c \frac{\sinh \lambda}{ca^2 \lambda} AE} = 1 \quad \text{この関係式 (11) 式に代入して } \mu_0 = \frac{Nl}{AE} \frac{\tanh \beta}{\beta} + \frac{1}{\cosh \beta} \mu_l \text{ ----- (12)}$$

桁先端では $\frac{\mu}{l} = m$ 従つて $\mu = l$ 即ち $m=1$ (9)式の m に $m=1$ を代入して。

$$N_l = N - \frac{Ml(\cosh \beta - 1)}{\beta \sinh \beta} (\mu_0 + \mu_l) \text{ ----- (13) } \quad (13) \text{式に (12) 式を代入して}$$

$$N_l = N - \frac{Ml(\cosh \beta - 1)}{\beta \sinh \beta} \left\{ \frac{Nl \tanh \beta}{AE \beta} + \frac{1}{\cosh \beta} \mu_l \right\} - \frac{Ml(\cosh \beta - 1)}{\beta \sinh \beta} \mu_l \quad \text{而して } \frac{Ml^2}{\beta^2 AE} = 1 \text{ の関係式を代入して}$$

$$N_l = \frac{N}{\cosh \beta} - \left(\frac{Ml}{\beta} \tanh \beta \right) \mu_l \text{ ----- (14) } \quad \text{桁先端の地盤反力 } N_l \text{ と 貫入量 } \mu_l \text{ との関係は、地盤}$$

が降伏するまでは、一次の比例関係にあるとすると $N_l = K_l \mu_l$ ----- (15)

よって K_l : 鉛直方向地盤反力係数 (kg/cm) である。いま、桁先端内縁部が地盤に貫入する場合、鉛直方向 1cm 貫入に対する剪断係数を k とすると $k = \frac{q}{1 \text{ cm}}$ (kg/cm²) で表はされるものとする。いま、桁頭荷重を Q_0 、桁材の圧縮量を無視すると、桁先端貫入量 μ_l は

$$\mu_l = \frac{Q_0}{A_l k} \quad \text{但し } A_l : \text{桁先端内縁部表面積で } A_l = \pi r^2 \csc \lambda$$

$$\text{従つて、鉛直方向地盤反力係数 } K_l \text{ は } K_l - \frac{Q_0}{\mu_l} = \frac{Q_0}{A_l k} = k \pi r^2 \csc \lambda = \frac{2Zk \rho \sin(\lambda + \varphi) \tan \varphi}{1 \text{ cm}} \pi r^2 \csc \lambda \quad (\text{kg/cm})$$

$$\text{この関係式 (14) 式の } N_l \text{ に 代入して } K_l \mu_l - \frac{N}{\cosh \beta} - \left(\frac{Ml}{\beta} \tanh \beta \right) \mu_l \quad \text{従つて } \mu_l = \frac{N \beta}{K_l \beta \cosh \beta + Ml \sinh \beta} \text{ ----- (15)}$$

$$\text{次に (15) 式と (12) 式に代入して (16) 式を得る。 } \mu_0 = \frac{Nl}{AE} \frac{\tanh \beta}{\beta} + \frac{1}{\cosh \beta} \left\{ \frac{N \beta}{K_l \beta \cosh \beta + Ml \sinh \beta} \right\}$$

即ち (15) 式、(16) 式より、桁先端の沈下量 μ_l 、桁本体 AB 断面の変位量 μ_0 を求めることができる。

次に、杭先端の地盤反力 N_L は
$$N_L = K_L M_L = K_L \frac{N}{K_L \beta \cot \beta + M_L \sin \beta} \quad \text{----- (17)}$$

即ち (17) 式で示す N_L は円錐体の尖端 C 点における地盤反力を表している。

3. 杭本体と円錐面との交点 即ち不連続点 A 及 B 点の鉛直方向地盤応力 σ_A, σ_B

杭が地盤に貫入すると、先ず円錐体の尖端 C に於いて、地盤が破壊されるが、同時に不連続面 A, B に於いても地盤が破壊を受ける。この場合地盤に発生する滑面は、A, B 点を通ると考えられる。いま、この滑面を放射せん断面に近似するとすると、尖端 C 点の鉛直方向地盤応力 N_L と σ_A, σ_B との間には次の関係式がある。即ち

$$N_L = \sigma_A e^{2\theta \tan \varphi} \quad \text{----- (18)} \quad N \text{ の値は AB 断面が受ける}$$

荷重であるが、 $N = \pi r^2 q$ 但し q は (2) 式によって得られる。

即ち σ_A は、(17) 式 (18) 式より求められる。

この σ_A は鉛直方向地盤応力であるが、これを半径方向水平垂直応力に変換する。

さて、いま $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ を 3 主応力として $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ と考へる。

Mohr の破壊条件より

$$\frac{\sigma_1}{\sigma_3} = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \quad \times \quad \sigma_2 = \nu (\sigma_1 + \sigma_3) \quad \nu: \text{土のポアソン比}$$

次に σ_3 は最小主応力であり、円周方向水平垂直応力 σ_t も最小応力と考えられるが σ_t の

値は
$$\sigma_3 - \sigma_t = \frac{\frac{1}{2}(1 - \sin \varphi)}{2(\frac{1}{2} + 1)} (2K_m + 1) \gamma Z \quad \text{と表はされる。}$$

従つて之等の関係式より
$$\sigma_1 = \frac{1 + \sin \varphi}{1 - \sin \varphi} \sigma_3 \quad \sigma_2 \text{ の値も定まつてくる。}$$

次に、地盤応力は釣合状態にあるが

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = \sigma_r + \sigma_t + \sigma_z \quad \text{----- (19)}$$

(19) 式によつて $\sigma_3 - \sigma_t$ であり、 $\sigma_2 = \sigma_A$ であるが、(19) 式より σ_r 即ち A 点の半径方向水平垂直応力 σ_{rA} が求まる。

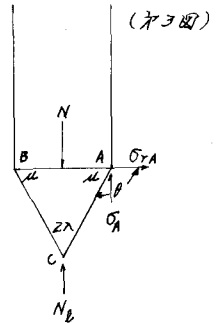
4. 釣合条件式より求めた破壊領域内の地盤応力 σ_r

円柱座標を用いて地盤内の釣合条件より、杭周破壊域の半径方向水平垂直応力 σ_r を求めた算定式は次の如く表はされている。即ち

$$\sigma_r = \left\{ \frac{m(1 - \sin \varphi)}{2(1 + m \sin \varphi)} + \left(\frac{R}{r} \right)^\alpha \right\} \left\{ \frac{m(1 + \sin \varphi) + 2}{m + 1} K_m - \frac{m(1 - \sin \varphi) \{ 2 + m(1 + \sin \varphi) \}}{2(1 + m)(1 + m \sin \varphi)} \right\} \quad \text{----- (20)}$$

但し $\alpha = \frac{2(1 + \sin \varphi)}{m(1 + \sin \varphi) + 2} \quad m: \text{ポアソン数} \quad K_m: \text{静止土圧係数}$

$R: \text{破壊領域} \quad r: \text{杭の半径}$



即ち杭本体と円錐体との交差、不連続点Aの σ_{rA} と σ_r は、近似的に等しいと置くことに
よつて、破壊領域Rが算定される。

5. 杭先端鉛直下方の塑性範囲

杭先端鉛直下方の地盤は、杭の貫入によつて隣固められる。この範囲は、(15)式に示す M_L の値
に等しいと考へる。即ち基礎構造体下方は、之に接した土の鉛直変位であるとの考へてある。

6. 杭本体と円錐体との交差A、又はBより上方の地盤破壊域

杭が地盤に貫入する際、地盤は杭軸方向に剪断される。いま、滑面に沿う剪断応力を τ
とすると $\tau = kZ \tan \varphi (1 - \sin \varphi)$ と表はされる。従つて剪断応力 τ は、深さZの函数と
なる。杭本体に接する地盤の破壊域は、地表面では零、深さ方向に従つて拡大
されると推定できる。このことは、実験上からも立證される。

7. 数値計算

杭本体の長さ100cm、直径15cm、先端円錐体の先端角度 30° 及 60° の二種の杭について、
地盤の破壊域を算定しよう。砂質地盤の内部摩擦角 $\varphi = 30^\circ$ 、ホアソン比 0.3、土の
単位重量 $\gamma = 1800 \text{ kg/m}^3$ 、(1)式より $C_2 = 0.0186 \text{ kg/cm}^2$ 、2節の各式を用いて $l_0 = 26 \text{ cm}$ 、

従つて $T = 152 \text{ kg}$ 、 $q_0 = 0.1017 \text{ kg/cm}^2$ 。

(i) 先端角 $2\lambda = 60^\circ$ の場合

(2)式より $q = 1.8643 \text{ kg/cm}^2$ AB断面に受くる荷重 $N = \pi Y^2 q$ $K_L = 55.0646 \text{ kg/cm}$

$M_L = 0.01443 \pi Y^2 q = 4.75 \text{ cm}$ $N_L = 261.5508 \text{ kg}$ $\theta = 120^\circ$ $\sigma_A = 23.258 \text{ kg}$

単位応力 $\sigma_A = 0.1317 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma_1 = 0.2076 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma_2 = 0.083 \text{ kg/cm}^2$ $\sigma_3 = 0.0692 \text{ kg/cm}^2$

従つて $\sigma_{rA} = 0.1589 \text{ kg/cm}^2$ 一方 (20)式 $\sigma_r = 0.054 + 0.0585 \left(\frac{R}{15}\right)^{0.46}$ $\therefore R = 26.55 \text{ cm}$

即ち $R = 3.54 Y$

(ii) 先端角 30° の場合

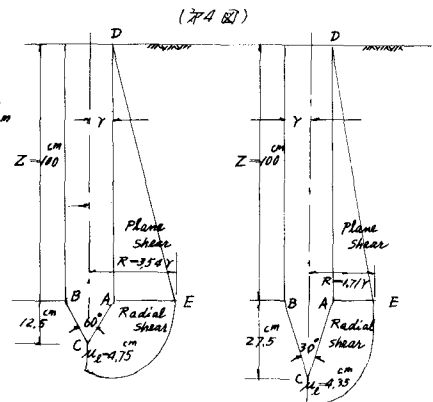
$q = 2.1783 \text{ kg/cm}^2$ $M_L = 4.35 \text{ cm}$ $K_L = 77.7128 \text{ kg/cm}$

$N_L = 338.8278 \text{ kg}$ $\sigma_A = 30.1291 \text{ kg}$

単位応力 $\sigma_A = \frac{30.1291}{3.14 \times 7.5^2} = 0.1706 \text{ kg/cm}^2$

半径方向 $\sigma_{rA} = 0.12 \text{ kg/cm}^2$ $R = 12.80 \text{ cm}$

即ち $R = 1.71 Y$ 図4に塑性領域を示す。



出典：土質杭に関する模型実験、建築学論議
名城大学理工学部研究報告 No. 11、
昭和44。

参考文献：柴田道生：基礎杭の貫入と支抗力に関する研究(Ⅲ)。

柴田哲男：ソールの710支抗力計算、土木基礎
76/18、No. 6

西田義親：砂地盤に及ぼす杭の隣固め範囲、土と基礎 76/13、No. 6。