

III-115 杭の座屈に関する一研究 (その2)

法政大学 工学部 正員 山門明雄

〃 〃 〃 半田親弘

大林組 〃 の徳永正博

1. はじめに

杭基礎に於ける杭の座屈についての検討は現在ではほとんど無視されている。これは実験的にも実際の場合でもその様な現象はほとんど発生しないという結論に達しているからである。そしてこれに関する実験研究は外国では多いが我国ではあまり見当らない。これらの外国の研究の多くは1929年に発表された、Granholm の論によるものが多く、60年代に発表された論えまでのGranholmの考え方と、あまり大差ない様に思われる。我国では勝見が杭周辺摩擦を考慮した数値方程式を解いて居り、スポンジ中の模型杭で実験をしている。

我々は砂中に模型杭を埋込んで横方向の地盤反力係数と、周辺摩擦力を測定し、それより縦、横のバネ定数を求め、それを用いて理論的座屈荷重と座屈モードを求めた。また砂中の杭に軸力を与えて座屈荷重、モードを求め、理論値と比較して、その有効性や実際の杭の座屈の可能性を検討することにした。

2. 実験

実験は数回の実験に於いて再現性がある程度可能であることを考慮し、また、実際の地盤になるべく近似させるために豊浦標準砂(比重2.64均等係数1)を用いた。この標準砂は、鉄筋コンクリートで造られた実験槽(1メートル立方)の中に3層に分けて詰められ、各々の層はパイププレートで締め固められた。砂の締め具合の状態は、ゆるぎめと、かたぎめを考へ、それぞれ $e=0.96$, $e=0.82$ に決定した。なおこの標準砂は $e_{max}=0.97$, $e_{min}=0.58$ であった。模型杭としては、種々の理由により長さ91.7cm、幅10cm厚さ0.32, 0.4cmの鋼板を使用した。鋼板の表裏面には5~10cm間隔に歪ゲージを貼付け、座屈モードの測定、軸力の変化等を測定した。座屈実験は両端ヒンジ、両端固定の2種の境界条件について行い、それぞれかたぎめ、ゆるぎめについて行なった。座屈荷重の測定は実験槽にフレームを埋込み、そのフレームにジャッキとブルービーミングを取付けて行なった。

また座屈実験には直接の関係はないが理論計算に用いる横バネを求めるため、横力と模型杭に加える荷重試験を行ない、また縦バネを決定するために杭の周辺摩擦力も測定した。実験に用いた実験槽を図-1に示す。

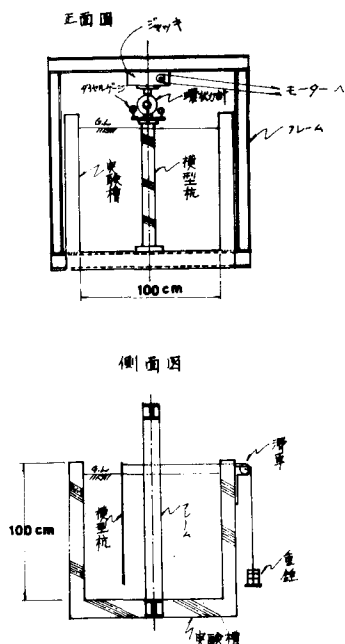


図-1 実験槽

2. 理論解析

構造物が圧縮の軸力を受けている場合、荷重を増加させるとその軸力も増加し、ついにはその部材は折れ曲がって破壊する。この様な現象を座屈というが、座屈は1つの平衡状態から他の平衡状態に移る時の不安定現象である。従ってこの問題を解くには従来の微小変形理論では不可能で大変形理論に従わなければならない。これは構造物がある力を受けた時、構造物の変形が大きい時には力の釣合いは、その変形した後の状態で考えなければならないという考え方である。大変形を起こした場合の構造物の剛性マトリックスは一般には次の様に書かれる。

$$K = K_E + K_G \quad \dots \dots \dots (1)$$

K_E ; 微小変形理論に於ける弾性剛性マトリックス (elastic stiffness matrix)

K_G ; 形状変化に関する剛性マトリックス (geometrical stiffness matrix)

(1). はり要素の剛性マトリックス

はり要素に生じる変位は図-2 に示す如く6個である。

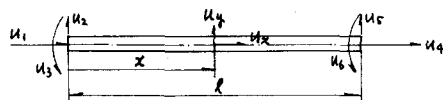


図-2 はり要素に生じる変位とその方向

$u_1 \sim u_6$ を使用してはりの任意の位置に於ける変位 u_x, u_y を求める。これは有限要素法の場合と同様に変位関数 $u_x = a_0 + a_1 x$, $u_y = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + b_3 x^3$ を用いて容易に求める事ができる。

$$\begin{aligned} u_x &= (1 - \frac{x}{l})u_1 + (\frac{x}{l})u_4 \\ u_y &= (1 - \frac{3x^2}{l^2} + \frac{2x^3}{l^3})u_2 + (\frac{3x^2}{l^2} - \frac{2x^3}{l^3})u_5 + (x - \frac{2x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2})u_3 + (-\frac{x^2}{l} + \frac{x^3}{l^2})u_6 \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (2)$$

また、曲げを受けるはりの大たわみに対する歪は次式で決定される。ここで y ははりの中立軸から割られる。

$$\epsilon_{xx} = \frac{du_x}{dx} + \frac{1}{2}(\frac{du_y}{dx})^2 - y \frac{d^2 u_y}{dx^2} \quad \dots \dots \dots (3)$$

(3)式を使って歪エネルギーを決定すると

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{E}{2} \int_V \epsilon_{xx}^2 dV = \frac{E}{2} \int_0^l \int_A [\frac{du_x}{dx} - \frac{d^2 u_y}{dx^2} y + \frac{1}{2}(\frac{du_y}{dx})^2]^2 dV \\ &= \frac{E}{2} \int_0^l \int_A [(\frac{du_x}{dx})^2 + (\frac{d^2 u_y}{dx^2})^2 y^2 + \frac{1}{4}(\frac{du_y}{dx})^4 - 2 \frac{du_x}{dx} \frac{d^2 u_y}{dx^2} y - \frac{d^2 u_y}{dx^2} (\frac{du_y}{dx})^2 y + \frac{du_x}{dx} (\frac{du_y}{dx})^2] dx dA \end{aligned}$$

高次の項を無視し、 $\int y dA$ の積分を1とすると

$$U_i = \frac{EA}{2} \int_0^l (\frac{du_x}{dx})^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l (\frac{d^2 u_y}{dx^2})^2 dx + \frac{EI}{2} \int_0^l \frac{du_x}{dx} (\frac{du_y}{dx})^2 dx \quad \dots \dots \dots (4)$$

(2)式より $\frac{du_x}{dx} = \frac{1}{l}(-u_1 + u_4)$, $\frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{1}{l}[6(-\xi + \xi^2)u_2 + (1 - 4\xi + 3\xi^2)lu_3 + 6(\xi - \xi^2)u_5 + (-2\xi + 3\xi^2)lu_6]$, $\frac{d^2 u_y}{dx^2} = \frac{1}{l^2}[6(-1 + 2\xi)u_2 + 2(-2 + 3\xi)lu_3 + 6(1 - 2\xi)u_5 + 2(-1 + 3\xi)lu_6]$ (5)

$\xi = \frac{x}{l}$

(5)式を(4)式に代入して積分すると次式が導かれる。

$$\begin{aligned} U_i &= \frac{EA}{2l}(u_1^2 - 2u_1 u_4 + u_4^2) + \frac{2EI}{l^3}(3u_2^2 + l^2 u_3^2 + 3u_5^2 + l^2 u_6^2 + 3lu_2 u_3 - 6u_2 u_5 + 3lu_3 u_6 \\ &\quad - 3lu_3 u_5 + l^2 u_3 u_6 - 3lu_5 u_6) \\ &\quad + \frac{EI}{l^2}(u_4 - u_1)(-\frac{3}{5}u_2^2 + \frac{1}{15}l^2 u_3^2 + \frac{3}{5}u_5^2 + \frac{1}{15}l^2 u_6^2 + \frac{1}{10}lu_2 u_3 - \frac{1}{5}u_2 u_5 + \frac{1}{10}lu_3 u_6 \\ &\quad - \frac{1}{10}lu_3 u_5 - \frac{1}{30}l^2 u_3 u_6 - \frac{1}{10}lu_5 u_6) \end{aligned} \quad \dots \dots \dots (6)$$

$F = \frac{EA}{l}(u_4 - u_1) \div \text{const}$ を導入して(6)式に Castiglione の第1定理を適用すると荷重-変位関係式が得

られる。(7)式の右辺第1項は弾性剛性マトリックス、第2項は形状変化に関する剛性マトリックスである。

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ P_3 \\ P_4 \\ P_5 \\ P_6 \end{bmatrix} = \frac{Ez}{l^3} \begin{bmatrix} Al^3/12 & & & & & \\ & 0 & 12 & & & \\ & & 6l & 4l^2 & & \\ & -Al^3/12 & 0 & 0 & 4l^3/12 & \\ & & 0 & -12 & -6l & 0 \\ & 0 & 6l & 2l^2 & 0 & -6l \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} + \frac{F}{l} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & & & \\ & 0 & 1/10 & 2l/15 & & \\ & & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & 0 & -\frac{6}{5} & -l/10 & 0 \\ & 0 & l/10 & -l^2/30 & 0 & -l/10 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{bmatrix} \quad (7)$$

(2). 座屈荷重の計算

座屈問題は(7)式からも明らかな様に固有値問題の形式になっている。すなわち座屈を起こした時矢どエネルギーは負になるので剛性マトリックスの行列式は0になり、固有値が座屈荷重、固有ベクトルが座屈モードとなる。固有値及び固有ベクトルを求める方法はいろいろあるが、座屈荷重は最小固有値によって与えられることから、最小固有値とそれに対応する固有ベクトルを求めればよい。ここでは種々の方法を試みたが計算時間、収束回数が速く、固有ベクトルも同時に求まるべき乗法を主に使用した。軸力を受ける杭は図-3に示す様にモデル化し、それぞれのバネ定数は実験により求めたものである。

この図に示してあるバネの節数の数が多い程、精度は良くなるわけであるが、計算時間や誤差の割合を考えると大体10節数前後にするのが妥当な様である。バネが入った場合の計算は、横バネの場合は(7)式の弾性剛性マトリックスの対応する変位の対角要素にそのバネ定数を加えてやれば良いのであるが縦バネの場合は少しやっかいである。これは縦バネがそれぞれ杭を分割した部材の軸力の変化に影響を与える為で、この処理の方法は縦バネが存在している場合のそれぞれの部材の軸力分布の割合を(7)式の右辺の第2項に掛けてやって全体のマトリックスを合成すればよい。この処理によつて縦バネ定数は対角要素に加えなくても良いことが言える。

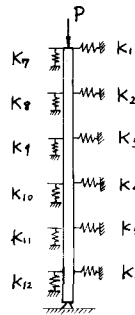


図-3 杭のモデル化

3. 縦横バネ定数の決定

横バネの決定については前にも度々述べているが、これは模型杭に極力載荷実験を行なつて杭各部のたわみ y (cm)と地盤反力 P (kg/cm²)を求め、これらの値より横方向地盤反力係数を求める。横方向地盤反力係数は、たわみ地盤反力関係曲線の勾配として求められる。この地盤反力係数に杭幅と杭の節数間の長さを掛けて横バネ定数とする。縦バネは杭周面摩擦力の变化をバネで置換させたもので、杭各部の周面摩擦力の变化とその各点での軸方向変位量との関係曲線の勾配で表わす。横バネも縦バネも単位はkg/cm²で、線形バネとしてある。

4. 実験結果及び計算結果

図-4では計算で求めた座屈モードと実験で求めた座屈モードを示す。計算値、実験値とも半波長の数は3個であり、下に行く程減衰している。座屈モードを求める事によりその振幅の最大の位置がわかり、もし破壊する場合にはその前後で破壊することが予想される。図-5には、

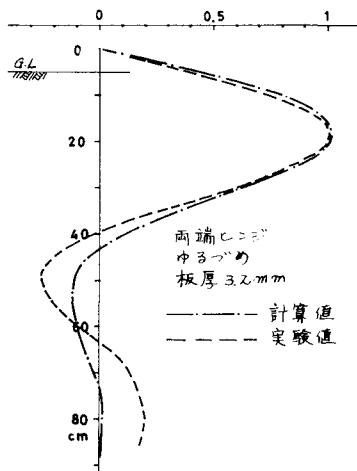


図-5 座屈モード

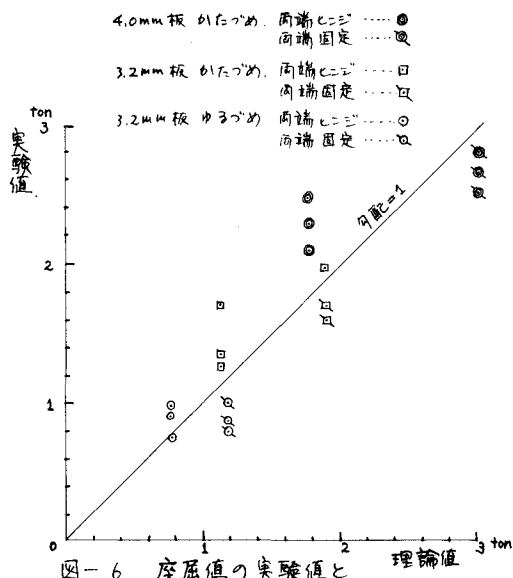


図-6 座屈値の実験値と理論値の比較

座屈荷重の実験値によるものと理論値によるものの比較を示す。傾き 1 の直線上に点があれば理論値・実験値が一致したことを表わすのであるが、非常に精度を要する実験であるので一致させることは困難である。

5. 考察及び結論

空気中に於ける座屈では両端ヒンジの場合と両端固定の場合では座屈荷重は 4 倍違うのであるが、砂中の実験では 1 割程度、理論値でも 5 割程度の差である。これより地盤中の杭の支持条件は座屈にはあまり影響を与えないことがわかる。座屈モードについては実験値、理論値の最大位置は大体一致して居り、それも地表面近くであることがわかる。モードの半波長の数は杭の剛性、地盤の強さなどによって決まってくるのであるが、この実験では 3 個であった。実際のところ土には時間的要素や非線形性を考慮しなければならぬのであるが、ここに示した様に工学的なモデルにおきかえて計算しても座屈挙動はある程度把握することが出来る。ここで用いた方法の利点は地盤状態がいかに変化しようと横バネと縦バネをええわかれれば現実に近い座屈モードと座屈値が求まるということである。実験室に於ける模型杭でもかなりの座屈荷重を要したので、実際の杭に関して座屈の可能性はかなり低い様に思われるが、しかし、軟弱地盤層など細長い杭でこれから多用されると思われる杭について座屈の可能性を調べたい時には有効な方法であると思われる。また軸力が加わる他に、横力、回転力が加わった場合の座屈の可能性も簡単に調べることが出来る。

参考文献 1) S. P. Timoshenko and J. M. Gere "Theory of elastic stability" McGraw Hill Book Co. Inc.

2) H. Granholm "On the elastic stability of piles surrounded by a supporting medium." Ingen. Vetensk.

Akad. Handl. Nr. 89, Svensk-Bokhandelscentralen A.B. Stockholm

3) 後藤、勝見 "杭の座屈に関する一研究" 第 20 回年次学術講演会概要 第 II

4) J. S. Przemieniecki "Theory of matrix structural analysis." McGraw Hill Book Co. Inc