

神戸大学・大学院 学生員・ス武勝保
山梨大学・工学部 正員 平島健一

1. まえがき

二次元弾性板内に二円孔と設けた場合の孔周辺応力は従来より、双極座標系による方法、複素変数法その他の手法を用いた解析が行われてきた。このうち外荷重と応力関数で表示した双極座標系での解法は任意分布の外荷重の場合に対して一般性に乏しく、また麗点法と組み合わせた複素変数法は円孔間隔が近接すると収束性が低下し、計算時間が長くなる欠点がある。ここでは、それらの欠陥を取り除くために、外荷重を級数展開し、双極座標系による解法を用いて、充分遠方より作用する三次元的に傾斜した地山荷重のもとでの二円孔周縁の応力分布と求めたものである。

2. 解法の概要

面内に作用する外荷重応力 σ_x^0, σ_y^0 および τ_{xy}^0 に対する解法は双極座標系を用いて Jeffery 以下、多くの研究者により式の誘導ならびに幾つかの数値例が示されているので、ここでは、二円孔の孔径に比較して充分遠方から面外 (Z 軸) 方向の外荷重 τ_{xz}^0 および τ_{yz}^0 が作用する場合の解法の概要を述べることにしよう。

いま、次式で定義されるような双極座標系：

$$\alpha + i\beta = \log \frac{z + i(y+a_0)}{z + i(y-a_0)} \quad (1)$$

と考えるものとすれば、 $\alpha = \text{const.}$ の曲線は二円孔の境界とその一部分とする円孔群であり、 $\beta = \text{const.}$ は α に直交する円孔群を表わす。

この座標を用いて Fig. 1 に示すような面外 (Z 軸) 方向の外荷重 τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 の作用のもとで、変位の一意性と満足するように応力関数 $\psi(\alpha, \beta)$ を次式のように仮定する。

$$\psi(\alpha, \beta) = \sum_{n=1}^{\infty} \{ P_n(\alpha) \cos n\beta + Q_n(\alpha) \sin n\beta \} \quad (2)$$

ここに、

$$\left. \begin{aligned} P_n(\alpha) &= E_n \cosh n\alpha + F_n \sinh n\alpha \\ Q_n(\alpha) &= E'_n \cosh n\alpha + F'_n \sinh n\alpha \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

とすると、外荷重 τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 が作用する場合の円孔の円弾性体の仮想円孔周縁上の応力 τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 を級数表示すれば、

$$\left. \begin{aligned} \tau_{xz}^0 &= -\tau_{yz}^0 e^{\mp \alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp n\alpha} (\tau_{xz}^0 \sin n\beta \pm \tau_{yz}^0 \cos n\beta) \\ \tau_{yz}^0 &= \tau_{xz}^0 e^{\mp \alpha} + 2 \sinh \alpha \sum_{n=1}^{\infty} e^{\mp n\alpha} (\tau_{yz}^0 \sin n\beta \mp \tau_{xz}^0 \cos n\beta) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

となる。ただし $\alpha > 0$ のとき上側符号を、 $\alpha < 0$ のとき下側符号をとる。

Fig. 1

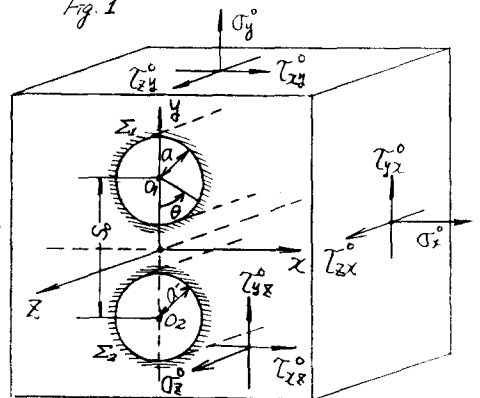


Table 1 Equal Holes ($a=a'$), $S_0/a = 1.20$

θ	σ_0 around Σ_1			τ_{0z} around Σ_1	
	$\sigma_x^0=1.0$	$\sigma_y^0=1.0$	$\tau_{xy}^0=1.0$	$\tau_{xz}^0=1.0$	$\tau_{yz}^0=1.0$
0°	4.417	-0.430	0.0	3.535	0.0
15°	3.817	-0.415	5.485	3.020	0.136
30°	2.695	-0.392	5.221	2.104	0.473
45°	1.438	0.121	3.415	1.355	0.945
60°	0.221	1.122	1.839	0.765	1.378
75°	-0.629	2.073	0.241	0.231	1.681
90°	-0.926	2.581	-1.532	-0.289	1.825
105°	-0.622	2.499	-3.209	-0.793	1.810
120°	0.160	1.905	-4.364	-1.260	1.649
135°	1.216	0.996	-4.639	-1.660	1.359
150°	2.263	0.051	-3.867	-1.967	0.966
165°	3.020	-0.647	-2.190	-2.160	0.501
180°	3.295	-0.903	0.0	-2.227	0.0

しからに、実際は二円孔周縁は自由境界であるから、境界条件としては式(4)における $\tau_{\alpha\beta}^i$ (法線方向せん断応力) と絶対値が等しく反対符号の外荷重と円孔周縁に作用させればよいことになる。

双極座標系で表わした面外せん断応力 $\tau_{\alpha\beta}^i$, $\tau_{\beta\alpha}^i$ は式(2)の応力関数を用いて

$$\tau_{\alpha\beta}^i = h \frac{\partial \psi}{\partial \beta}, \quad \tau_{\beta\alpha}^i = h \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad h = \frac{1}{a_0} (\cosh d - \cos \beta) \dots (5)$$

で与えられるから、したがって面外せん断応力 $\tau_{\alpha\beta}$, $\tau_{\beta\alpha}$ は式(4)および式(5)の結果を重ね合わせれば求まる。

3. 数値計算例

三次元地山内に二個の等しい径の円孔 Σ_1 および Σ_2 を設けた場合に、外荷重として $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0, \tau_{xz}^0, \tau_{yz}^0$ の単位応力が作用したときの孔縁応力 $\sigma_\theta, \tau_{\alpha\beta}$ の値を求めたものが Table 1 である。これは二等円孔の接点距離 S_0 を $S_0/2a = 1.20$ とした場合の孔縁上 $\theta = 15^\circ$ の間隔での応力値である。面内荷重 $\sigma_x^0, \sigma_y^0, \tau_{xy}^0$ の場合は従来までの結果とほとんど一致している。面外荷重 τ_{xz}^0, τ_{yz}^0 が作用する場合の結果も、 $S_0/2a$ をパラメータとして図示すれば、Figs. 2, 3 のようである。点線で示したものは、 $S_0/2a = \infty$ すなわち、一円孔のみが存在する時の分布である。 τ_{xz}^0 が作用する場合 (Fig. 3)、かなり顕著な応力集中の増大が認められる。 τ_{yz}^0 が作用する場合 (Fig. 2) では、周縁応力 $\tau_{\alpha\beta}$ は一円孔の場合に比べて、多少の応力低下を示している。

次に、この Table 1 に示した結果を適当に重ね合わせることによって、任意に傾斜した三次元的な地山荷重が作用する場合に、二等円孔 ($S_0/2a = 1.20$ の場合) の周縁での応力を簡単に計算することが可能である。いま、例えば Fig. 4 で示すような三次元地山荷重が作用する場合の、二円孔周縁の応力 $\sigma_\theta, \tau_{\alpha\beta}$ および σ_x の分布を円孔 Σ_1 上に図示すれば Fig. 5 のようになる。図中に点線で示したものは一円孔の場合の同一荷重下での σ_θ の分布である。なお、この計算ではポアソン比 $\nu = 0.25$ として σ_x を求めている。

4. おわりに

二等円孔 ($a \neq a'$)、 $S_0/2a$ の変化した場合の例については講義会当日に発表する。

Fig. 2

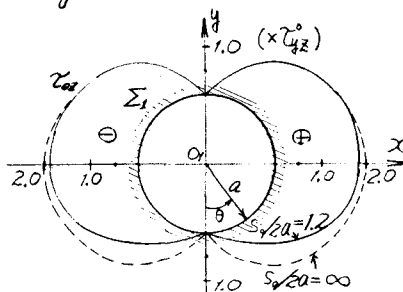


Fig. 3

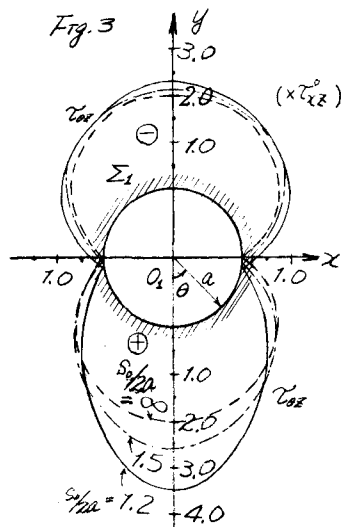
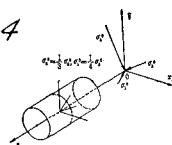


Fig. 4



地山内の応力状態の一例

	σ_x^0 方向	σ_y^0 方向	σ_z^0 方向
x	64°14'	32°43'	71°15'
y	119°37'	94°20'	30°00'
z	41°09'	122°22'	67°27'

$$\sigma_x^0 = \frac{1}{3} \sigma^0, \quad \sigma_y^0 = \frac{1}{4} \sigma^0$$

$$\left(\begin{array}{l} \sigma_x^0 = 0.387 \sigma^0, \quad \sigma_y^0 = 0.813 \sigma^0, \quad \sigma_z^0 = 0.384 \sigma^0 \\ \tau_{xy}^0 = 0.203 \sigma^0, \quad \tau_{yz}^0 = 0.055 \sigma^0, \quad \tau_{zx}^0 = 0.253 \sigma^0 \end{array} \right)$$

Fig. 5

