

名古屋大学工学部 正員 川本 勝石
 中部工大 ○水島 章次
 名古屋大学工学部 正員 斎藤 敏明

1. はじめに

有限要素法などの発達により、材料非線型問題の解析が比較的容易になってきたが、その場合、材料の応力-ひずみの非線型性をいかに表示して解析に導入するかが重要な問題である。実験によって得られた材料の応力-ひずみ関係（あるいは荷重-変形関係）に最小自乗法を適用して、適当な項数の多項式で近似したり、フーリエ級数のように直交多項式で近似したり、また、双曲線や放物線型の関数を仮定して曲線近似を行なうのが通常であるが、前者では項数の取り方や正規方程式の係数行列の条件などによってかなり精度が落ちる恐れがあり、また、後者では解析範囲の全応力レベルにおける応力-ひずみ関係を一つの関数で精度よく近似することが実際には困難である。これらに対して、近年、一つの関係曲線を多くの区間に分割して考える、いわゆるスプライン関数 (Spline Function) が利用され、非線型解析に導入されている¹⁾。もし、ある独立変数の値（例えば応力値）に対して多くの測定値（ひずみの値）が得られているような場合には最小自乗法を適用したスプライン関数を求めることにより、もっとも確からしい応力-ひずみ曲線が数式表示されるようになるだろう。ここではスプライン関数の概略を紹介し、それに最小自乗法を適用すること、および、分割条件による数式表示の精度などについて述べる。

2. スプライン関数の概念

スプライン (Spline) とは製図で曲線を引くときに用いられる自在定規のことで、Ahlberg ら²⁾によるとスプライン関数は Bernoulli-Euler の法則に従う薄いはりに対比させて次のように説明される。いま、図-1 に示すように一つの曲線 (区間 $a \leq x \leq b$) を考え、それをいくつかの節点で分割し、節点 i の座標 (x_i, y_i) は測定値よりプロットされて既知であるとする。図示の曲線を任意に曲げられた薄いはり (Spline) と考えるとき、節点 j におけるモーメント M_j はその点におけるたわみ曲線の二次導関数 $S''_d(x)$ (そのモーメントはこれに EI がかかるが、ここではそれを省略して考える) より求められるが、 $x_{j-1} \leq x \leq x_j$ で二次導関数 (曲率) が線型に変化すると仮定して次の関係が得られる。

$$S''_d(x) = M_{j-1} \frac{x_j - x}{h_j} + M_j \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (1)$$

ここに、 $h_j = x_j - x_{j-1}$ である。(1) 式を2回積分し、積分定数を定めることによって、次式を得る。

$$S_d(x) = M_{j-1} \frac{(x_j - x)^3}{6h_j} + M_j \frac{(x - x_{j-1})^3}{6h_j} + \left(y_{j-1} - \frac{M_{j-1}h_j^2}{6}\right) \frac{x_j - x}{h_j} + \left(y_j - \frac{M_jh_j^2}{6}\right) \frac{x - x_{j-1}}{h_j} \quad (2)$$

上式をマトリックス表示すると

$$S_d(x) = \{N\}^T \{q\} \quad (3)$$

$$\text{ここに、} \{q\}^T = [y_{j-1}, y_j, M_{j-1}, M_j] \quad (4-1)$$

$$\{N\}^T = \frac{1}{6h_j} [6(x_j - x), 6(x - x_{j-1}), (x_j - x)^2 - h_j^2(x_j - x), (x - x_{j-1})^2 - h_j^2(x - x_{j-1})] \quad (4-2)$$

(1)式と(2)式より明らかなように、関数 $S_\Delta(x)$ と $S'_\Delta(x)$ は区間 $[a, b]$ で連続であるが、 $S'_\Delta(x)$ の節点 j における連続性より次の条件を生ずる。

$$S'_\Delta(x_j^-) = S'_\Delta(x_j^+) \quad (5)$$

ここで、 $S'_\Delta(x)$ は(3)式より $S'_\Delta(x) = \{N'\}^T \{g\}$ として計算されるから、(4-1)、(4-2)式の関係を用いると次のようになる。

$$\mu_j M_{j-1} + 2M_j + \lambda_j M_{j+1} = 6 \frac{[(y_{j+1} - y_j)/h_{j+1}] - [(y_j - y_{j-1})/h_j]}{h_j + h_{j+1}} \quad (6)$$

ここで、 $\lambda_j = h_{j+1}/(h_j + h_{j+1})$ 、 $\mu_j = 1 - \lambda_j$ ($j = 1, 2, \dots, n$)

$x_0 = a$ で $M_0 = 0$ 、 $x_{n+1} = b$ で $M_{n+1} = 0$ の境界条件を仮定すると、次のように未知量 M_j ($j = 1, \dots, n$)に関する線型連立方程式をうる。

$$\begin{Bmatrix} 2 & \lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \mu_2 & 2 & \lambda_2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mu_3 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & \lambda_{n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \mu_{n-1} & 2 & \lambda_{n-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \mu_n & 2 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \\ \vdots \\ M_{n-2} \\ M_{n-1} \\ M_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_3 \\ \vdots \\ d_{n-2} \\ d_{n-1} \\ d_n \end{Bmatrix} \quad (7)$$

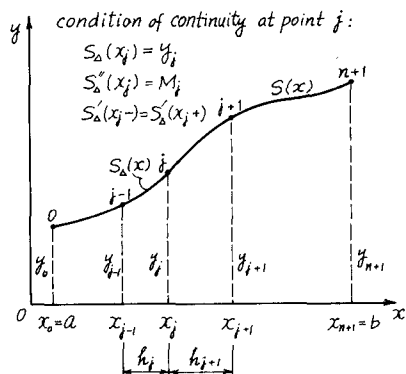


図 - 1

上式の右辺の d_j ($j = 1, \dots, n$)は(6)式の右辺で与えられるように、節点 j およびその前後の節点における関数値より計算される。(7)式を M_j について解くことにより、各

節点の位置における関数の2次導関数 $S''_\Delta(x_j) = M_j$ が求められるから、それらの値を(2)式に用いることにより、区間 $[a, b]$ でのスプライン関数が確定される。なお、分割が等間隔の場合には(7)式中の $\lambda_j = \mu_j = 1/2$ となる。応力-ひずみ曲線に対しては、上記の各式で、変数 x をひずみ ϵ に、関数値 y を応力 σ にとって考えればよい。その場合、変形係数は $S'(\epsilon)$ で与えられる。

(3)式で表わされる関係は有限要素法における要素の変位を規定する式に似ており、 $\{N\}$ は変位関数に相当するものと考えられ、また、(7)式は有限要素法の応力解析における弾性方程式と同様の型である。したがって、上記のようなスプラインによる応力-ひずみ曲線の関数表示を用いて非線型有限要素解析を行なう場合には、有限要素法における計算ルーチンをそのまま利用しうる利便がある。

3. 分散した測定値に対する処理

ある変数(ひずみ)に対する測定値(応力)は一般に誤差を伴うから、プロットした測定値のすべてを節点とするようなスプラインを求めると、かえって凹凸のはげしい曲線になる恐れがある。また、同じ条件のもとで何回か測定されてプロットされた点は、一般にある幅をもった帯状の曲線領域に分布する。このような場合にもっとも確からしい曲線を求めるためには、最小自乗法を用いてスプライン関数のあてはめを行なう必要がある。図-2に示すように変数 $x^{(w)}$ に対して測定値 $f(x^{(w)})$ が与えられており、もっとも確からしいスプライン関数 $S(x)$ が求めたとする。この場合、測定値の数 r は分割の数 $(n+1)$ よりも大きいことが必要である。いま、 $x_{j-1} \leq x^{(w)} \leq x_j$ で最小のものを x_{pj} 、最大

のものを x_{g_j} とすると, $S(x)$ に対する $f(x^{(k)})$ の残差の自乗の総和は次のようになる。

$$F(y_0, y_1, \dots, y_{n+1}) = \sum_{j=1}^{n+1} \sum_{k=p_j}^{q_j} \{S(x^{(k)}) - f(x^{(k)})\}^2 \quad (8)$$

したがって, (8) 式を最小にするように $y_0, y_1, \dots, y_{n+1}$ を求めれば, (x_{g_j}, y_{g_j}) ($j=0, \dots, n+1$) なる点はもっとも確からしいスプライン関数上の点となるから, それらの値を用いて, 2. で述べた方法によりスプライン関数を求めることができる。(8) 式を y_j で偏微分して零とおき,

$$\frac{\partial F(y_0, y_1, \dots, y_{n+1})}{\partial y_j} = 0 \quad (j=0, 1, \dots, n+1) \quad (9)$$

より, y_j を未知数とする正規方程式が次のように得られる。

$$\begin{pmatrix} t_{0,0} & t_{0,1} & \dots & t_{0,n} & t_{0,n+1} \\ t_{1,0} & t_{1,1} & \dots & t_{1,n} & t_{1,n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ t_{n,0} & t_{n,1} & \dots & t_{n,n} & t_{n,n+1} \\ t_{n+1,0} & t_{n+1,1} & \dots & t_{n+1,n} & t_{n+1,n+1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_n \\ g_{n+1} \end{pmatrix} \quad (10)$$

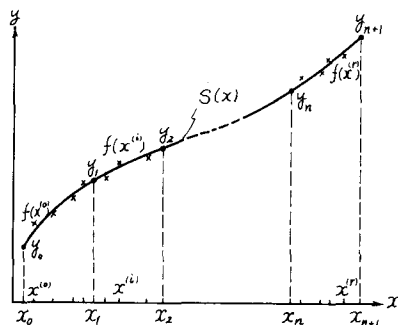


図 - 2

上式で $t_{i,j}$ および g_j はいづれも測定値 $(x^{(j)}, f(x^{(j)}))$ および分割点 x_j などのデータから求められるが等間隔の分割に対しては文献(3)によって与えられている。(10) 式の係数行列は対角要素がもっとも大きく, それから離れるほど小さくなるので, y_i は精度よく計算される。なお, 係数行列および常数項の各要素はスプラインの節点の数と位置の関数であるから, それらの取り方によって解 y_j の値, したがってスプライン関数も変化する。したがって, 節点の数と位置をどのように選べば, 与えられた測定データに対する最適スプライン関数が得られるかが検討されねばならない。

4. 数値計算例 および考察

砂の圧力-ひずみ曲線を対象にして, 2, 3 の計算を行った。市原研究室で行なわれた豊浦標準砂の三軸試験の結果を用いた。図-3 は拘束圧 $\sigma_3 = 1.0 \text{ kg/cm}^2$ の場合の測定結果のうちの一つの曲線からいくつかのデータ点を選んで用い, (7) 式および(2) 式を用いて求めたスプライン関数(8)を示したものである。実際には図-4 に示すように測定点は多いが, これらすべてをスプラインのデータとして用いると凹凸のばげしい曲線になるため, 図-3 に示す程度にデータ点を選んだ。しかし, これでも測点の上をスプラインが正しく乗って行くために, 誤差を含んだまじりの凹凸のある曲線を与えることになる。次に, 同一条件のもとで行なわれた3間ないし4間の測定点のすべてを用いて, 最小自乗法を適用したスプラインの計算例を示すと, 図-4 のようである。測定点数が少なく, 測定点($\times$ 印)がある分布(たとえば正規分布)に従っていないために, 最小自乗法的に処理したスプライン上の点($\circ$ 印)にかなりの誤差が含まれていると思われるが, そのため, スプラインはスムーズな曲線になっていない。スプラインの分割の数による結果の差異は曲線の傾斜の変化率の大きいところで大きく現われるが他の部分ではほとんど変化が見られない。 $j=0$ (この場合には原点)に対する処理として, 単に $M_0 = 0$ なる条件を入れるとスプラインはそれに沿った点(縦軸上の)を通り, 必ずしも原点を通らない。曲線の性質から原点を通ることが明らかであるから, そのことを考慮するために, 測定点として $(0, 0)$ に数個のデータがあるとして解析すればよい。しかし, この場合には, 原点近傍の測定値のウェイトが相対的に小さくなり, 直感的に曲線を引いた場合よりかなり測定点をはつれたスプラインを与

える恐れがある。

測定値が分散している場合のスプラインは、分割区間に入っている測定値の数に影響されるから、分割幅の取り方に問題がある。図-4の $\sigma_3 = 2.0 \text{ kg/cm}^2$ の全測定値を用いて、 $h = (\Delta E) = 0.5, 1.0, 2.0$ % に対して求めたスプライン関数上の点を示すと図-5 のようであり、計算時間も同時に示してある。これより、 $h = 0.5$ % の場合にはかなりスムーズな曲線を与えているが、分割幅をこの程度に小さくすると計算時間が極度に増加する。したがって、この場合には $h = 1.0$ % 程度でスプライン点を求め、それらをデータ点として、あらかじめ $h = 2.0$ % で最小自乗法を適用してスプラインを求める方が計算時間の点からも曲線の形状からも有利なように思われる。これらの詳細や、さらにスムーズなスプラインを求める方法については現在検討を進めているので、当日報告する予定である。

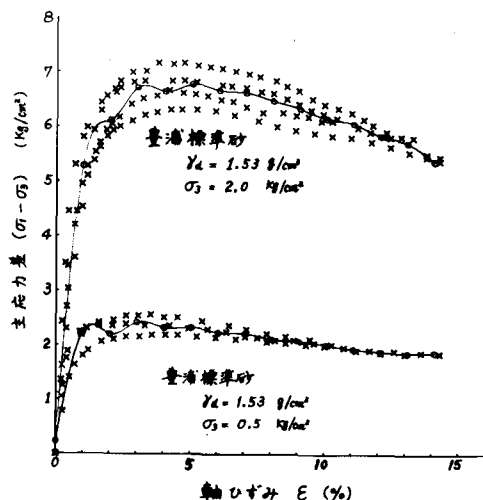


図 - 4

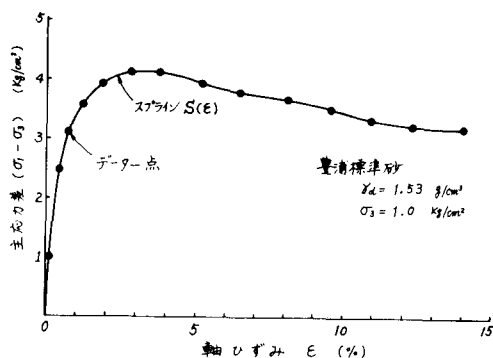


図 - 3

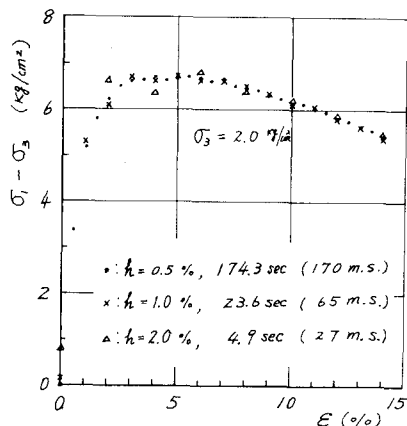


図 - 5

参考文献

- 1) Desai C.S.; *Nonlinear Analysis Using Spline Function*, ASCE, SM10, PP. 1461 ~ 1480, (Oct. 1971)
- 2) Ahlberg J.H. 他; *The theory of Spline and their applications*, Academic Press, New-York, 1967
- 3) 原田, 市田, 清野; スプライン関数を利用する曲線のあてはめ, 情報処理学会12回大会前刷, (昭和46年)