

京都大学工学部

赤井浩一

〃

足立紀尚

建設省

〇田野真ス

1. はじめに

近年土質材料の構成方程式の確立が強調され、幾多の研究が行われてゐるが、粘性土に対して二つの部面からの流れに大別される。

第一は時間依存性を考慮してレオロジーモデルを用いる手法で、村山と柴田や Christensen と Wu など Eyring の構造粘性を適用しきものや、Ostwald's Power Law を用いた Barden の研究がある。また、これに属す現象論的なものは Singh と Mitchell, 柴田と輕部, Barden, Walker のものがある。

第二は平衡時の応力-ひずみ関係の確立を目的にしきもので、とくに Roscoe 系統の研究は土質材料の実際の挙動に立って、エネルギー的考察を一部行ない、Drucker による弾-塑性作力学を応用して行なつたものである。我が国においては、柴田と輕部の実験的研究を基盤に、太田らによって「ダイラタンシー理論」と称される粘性土の構成方程式の誘導が行なわれた。これらの理論では粘性土をひずみ硬化とダイレイタンシーを有する材料と考へてゐる。

飽和粘性土の構成方程式は時間依存性を記述すべきであるという考えに立つて、求める構成方程式は上記の第一、第二に属するものを一般的に含むべきものである。本研究は飽和粘性土に対するより一般的の構成方程式の確立を目的として、ひずみ硬化性とダイレイタンシー効果を有し、かつ時間依存性のある材料と考へ、Roscoe の研究を基盤として、Perzyna による弾-粘塑性作力学を適用しきものである。

2. 弾-塑性作しき土質材料の構成方程式

以下の議論の如き、次の諸仮定にもとづく、Roscoe による "Critical State Energy Theory" を拡張しき。

- (1) 粘土は等方弾-塑性体であつて、その応力 σ_{ij} の主応力軸とひずみ増分 $d\epsilon_{ij}$ の主軸は一致する。
- (2) 全ひずみ ϵ_{ij} は弾性ひずみ ϵ_{ij}^E と塑性ひずみ ϵ_{ij}^P の和で表しきれる。
- (3) Loading surface が存在し、それは主応力空間で平均主応力軸に関して軸対称である。
- (4) Drucker による非弾性体に対する安定性を満足する材料である。

以上のより求める結果を Roscoe によるものと、太田らによるものと比較しきものが Table-1 である。この表で相互の比較が容易にできるが、以下の二点は最も問題である重要な仮定である。

- (1) 変形特性表示の適否；energy theory では消散エネルギーの表現であり、dilatancy theory では stress-volumetric strain 関係である。
- (2) Normality rule 成立の可否である。

Table - 1

	Energy Theory			Dilatancy Theory (Ohta et al)
	Original (Roscoe et al)	Modified (Roscoe, Burland)	Extended	
Critical State	$\left(\frac{q}{p}\right)_{\text{critical}} = M$	$\left(\frac{q}{p}\right)_{\text{critical}} = M$	$\left(\frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma_m'}\right)_{\text{critical}} = M^*$	$\left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right)_{\text{critical}} = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0)\mu}$
Dissipative Work Increment	$\delta W = p \cdot M \cdot \delta \varepsilon^p$	$\delta W = p \sqrt{(\delta v^p)^2 + (M \delta \varepsilon^p)^2}$	$dW = \sigma_m' M^* \sqrt{2J_2}$	
Stress - Plastic Strain-Relation	$\frac{\delta v^p}{\delta \varepsilon^p} = M - \frac{q}{p}$	$\frac{\delta v^p}{\delta \varepsilon^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2\eta}, \eta = \frac{q}{p}$	$\frac{dv^p}{d\varepsilon^p} = M^* - \frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma_m'}$	$\frac{dv^p}{d\tau_{oct}^p} = \pm 3 \left\{ \frac{\lambda + \kappa}{(1 + e_0)\mu} \mp \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} \right\}$
Plastic Volumetric Strain Increment	$\delta v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left\{ \frac{1}{M} d\left(\frac{q}{p}\right) + \frac{dp}{p} \right\}$	$\delta v^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left\{ \frac{\eta^2 d\eta}{M^2 \eta^2} + \frac{dp}{p} \right\}$	$dv^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \left\{ \frac{1}{M^*} d\left(\frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma_m'}\right) + \frac{d\sigma_m'}{\sigma_m'} \right\}$	$dv^p = \frac{\lambda - \kappa}{1 + e} \frac{d\sigma_m'}{\sigma_m'} + \frac{1 + e_0}{1 + e} \mu d\left(\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'}\right)$
Loading Surface (Yield Loci)	$\frac{q}{p} = -M \ln \frac{p}{p_0}$	$\frac{p}{p_0} = \frac{\eta^2}{M^2 + \eta^2}$	$\frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma_m'} = -M^* \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'}$	$\frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = \frac{\lambda - \kappa}{(1 + e_0)\mu} \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'}$
State Boundary Surface	$g = \frac{Mp}{\lambda - \kappa} (e_a - e - \lambda \ln p)$	$-(e_a - e) + \lambda \ln p = \left(\frac{M^2 - \lambda^2}{M^2 + \eta^2}\right)$	$\sqrt{2}J_2 = \frac{M^* \sigma_m'}{\lambda - \kappa} (e_a - e - \lambda \ln \sigma_m')$	$e - e_0 + \lambda \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m0}'} + (1 + e_0)\mu \frac{\tau_{oct}}{\sigma_m'} = 0$
Triaxial State $\sigma_1', \sigma_2' = \sigma_3'$ $\varepsilon_1, \varepsilon_2 = \varepsilon_3$	$p = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3}$ $q = \sigma_1' - \sigma_3' $ $\delta v = \delta \varepsilon_1 + 2\delta \varepsilon_3$ $\delta \varepsilon = \frac{2}{3} \delta \varepsilon_1 - \delta \varepsilon_3 $ 用いた $\lambda, \kappa, M, M^*, \mu$ は物質定数			$\sigma_m' = \frac{\sigma_1' + 2\sigma_3'}{3}$ $\sqrt{2}J_2 = \sqrt{s_{ij}s_{ij}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \sigma_1' - \sigma_3' $ $dv = d\varepsilon_1 + 2d\varepsilon_3$ $\sqrt{2}J_2 = \sqrt{de_{ij}^p de_{ij}^p} = \frac{\sqrt{2}}{3} d\varepsilon_1 - d\varepsilon_3 $ $s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_m' \delta_{ij}$ $de_{ij}^p = d\varepsilon_{ij}^p - \frac{1}{3} d\varepsilon_m^p \delta_{ij}$

3. Perzyna の 弾-粘塑性体

Perzyna は速度依存性の loading surface を考え、それを dynamic-loading function $f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp})$ と称し、ひずみ硬化を有する平衡時の yield function $F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{sp})$ (static yield surface) との関係は次の式とす。

$$F(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp}) = \frac{f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp})}{\kappa^*} - 1 \quad (1)$$

ここで $\kappa^* = \hat{\kappa}^*(w^{vp}) = \hat{\kappa}^*\left(\int_0^{\varepsilon_{ij}^{vp}} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^{vp}\right)$ はひずみ硬化パラメータであり、 ε_{ij}^{vp} は粘塑性ひずみ成分である。さらに dynamic loading surface の convexity と strain rate vector の方向に対する Normality を仮定して、次の構成方程式を提案した。

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} + \frac{1 - 2\nu}{E} \sigma_m \delta_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2)$$

ここで E, ν, γ は弾性定数であり、 γ は粘性係数である。ここで記号 $\langle \Phi(F) \rangle$ は

$$\langle \Phi(F) \rangle = \begin{cases} 0 & , F \leq 0 \\ \Phi(F) & , F > 0 \end{cases}$$

(1) 式と (2) 式から $I_2^{vp} = \frac{1}{2} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp} \dot{\varepsilon}_{ij}^{vp}$ を定義すると dynamic loading function は

$$f(\sigma_{ij}, \varepsilon_{ij}^{vp}) = \kappa^*(w^{vp}) \left\{ 1 + \Phi \left[\frac{(I_2^{vp})^2}{\gamma} \left(\frac{1}{2} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \right)^{-\frac{1}{2}} \right] \right\} \quad (3)$$

で与えられ、この式から dynamic loading surface は必ずみ硬化と必ずみ速度効果を有することが明らかである。特別の場合として $\gamma \rightarrow \infty$ を与えると $f(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}^{VP}) = K^*$, あるいは $F(\sigma_{ij}, \dot{\epsilon}_{ij}^{VP}) = 0$ となり inviscid の弾-粘塑性性を表す。

4. 弾-粘塑性性とし土質材料の構成方程式

拡張した Energy Theory と Perzyna の弾-粘塑性力学にもとづいて、構成方程式の誘導を行なうが、用いた諸仮定とその帰結を以下に示す。

(1) dynamic loading surface が存在すると仮定し、(3)式と table-1 から次式で与えられるとする。

$$f_d = \sqrt{2J_2} + M^* \sigma_m' \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{md}'} = 0 \quad (4)$$

$\Rightarrow K$ σ_{md}' は必ずみ硬化と必ずみ速度効果を考慮した $K^* = \sqrt{2J_2} / \sigma_m' = 0$ かつ σ_m' の値である。

(2) $f_d = 0$ に対して、同一の粘塑性必ずみ状態に対する static loading surface の存在を仮定して次式で与えられるものとする。

$$f_s = \sqrt{2J_2} + M^* \sigma_m' \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} = 0 \quad (5)$$

$\Rightarrow K$ σ_{my}' は必ずみ硬化の程度を表すもので、 $K^* = 0$ かつ σ_m' の値として与えられる。

(3) 関数 F は次のように定義する。

$$F = \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m'} + M^* \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{my}'} = M^* \ln \frac{\sigma_{md}'}{\sigma_{my}'} \quad (6)$$

これは $f_s = 0$ からの超過応力関数と考えられる。

(4) dynamic loading function (4)式にもとづき flow rule が成立すると仮定すれば

$$\dot{\epsilon}_{ij}^{VP} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{ij}}, \quad \frac{\partial f_d}{\partial \sigma_{ij}} = (M^* - \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m'}) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2J_2}}$$

$$\text{であるから} \quad \dot{\epsilon}_{ij}^{VP} = \gamma \langle \Phi(F) \rangle \left\{ (M^* - \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m'}) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right\} \quad (7)$$

(5) 静的平衡状態に近づくとき $f_d = 0$ は $f_s = 0$ と一致するから table-1 の state boundary surface から応力経路は、その二次元表示として次式で与えられる。

$$\frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_{me}'} = - \frac{\lambda M^*}{1-K} \frac{\sigma_m'}{\sigma_{me}'} \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{me}'} \quad (8)$$

したがって等方圧密で、圧密圧力 σ_{mo}' で与えられる initial loading surface は

$$f_i = \sqrt{2J_2} + M^* \sigma_m' \ln \left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{mo}'} \right) = 0 \quad (9)$$

となる。

(6) 以上から求める構成方程式は次式として求まる。

$$\dot{\epsilon}_{ij} = \frac{\dot{\sigma}_{ij}}{2G} + \frac{K}{1+e} \frac{\dot{\sigma}_m'}{\sigma_m'} \delta_{ij} + \gamma \langle \Phi(F) \rangle \left[(M^* - \frac{\sqrt{2J_2}}{\sigma_m'}) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{\delta_{ij}}{\sqrt{2J_2}} \right] \quad (10)$$

この関数 $\Phi(F)$ の関数形は理論はいしは実験により決定すべきものであり、(10)式の右辺第1項は以上の誘導で論理的には求まらないが、 $F > 0$ では粘塑性変形に比較して無視できるが、 $F \leq 0$ では考慮すべきであると考えて加之にものである。

本理論の基本的考え方は微視的説明のいかにいかんにかかわらず、土粒子骨格と水の二相系において間隙水圧の発生、すなわち有効応力そのものが R をすなわち時間依存するものとしていふこと

ある。したがって応力面($\sqrt{2}J_2, \sigma_m'$)に求めた非排水三軸圧縮試験の有効応力経路は、ひずみ速度の増大とともにRoscoeの応力経路から離れ、非排水クリープ試験では σ_m' はひずみ速度の減少、(ひずみの増大にも係り、ひずみ硬化の増大による $F(\sigma_1', \sigma_3')$ の減少と σ_m' の減少による。)とともに σ_m' -軸に平行に載荷直後の値から平衡状態へ向って移動する。これは(10)式において応力一定の条件で解くことに対応する。一方ラクゼーションに対しては(10)式において $\dot{\epsilon}_{ij} = \text{const.}$ で応力について解くことと求まる。

すなわち、以上のことはひずみ速度の影響によって、応力状態が(8)式から離れ、そのひずみ硬化とひずみ速度に対応するdynamic loading surface $f_d = 0$ 上にあることを意味する。したがって、 $f_d = 0$ すなわち $F(\sigma_1', \sigma_3')$ の決定に対し

では、同一の ϕ^* -値に対して同一の非弾性ひずみが生ずると仮定し、したがって静的応力経路上の、その ϕ^* に対応する点をstatic loading surface $f_s = 0$ が通ると考えることにより、ひずみ硬化の影響を導入する。Fig.-1はクリープ試験に対する以上の考え方を図示したものである。

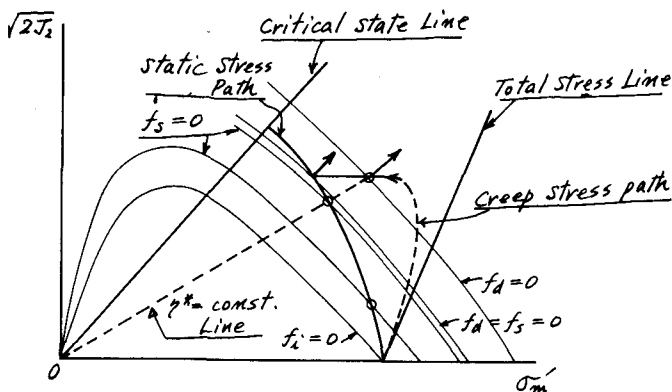


Fig. 1

変数 $\alpha(F)$ を求めるために再圧密した深草粘土を用いて、一段載荷による非排水三軸クリープ試験を行った。

Fig.-2はその結果求めた $F(\sigma_1', \sigma_3')$ と軸ひずみ速度 $\dot{\epsilon}_1$ の関係である。

まず近似として $\alpha(F) = C \exp(\alpha F)$ とすれば

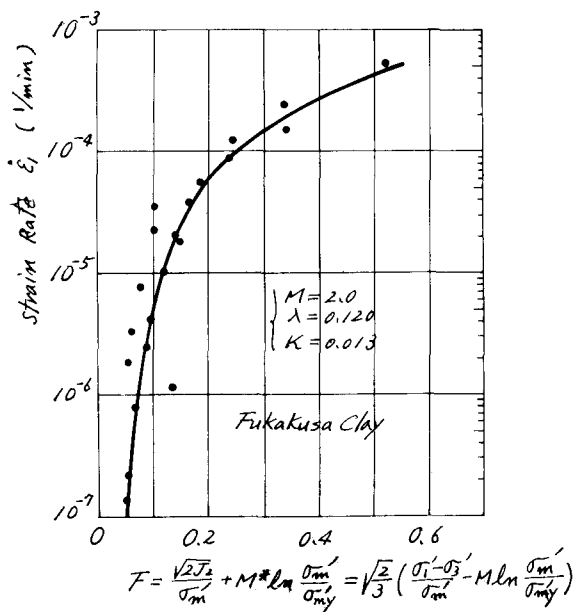
$$\dot{\epsilon}_1 = \frac{2}{3}(\dot{\epsilon}_1 - \dot{\epsilon}_3) = C' \exp\left(\alpha \frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_m'} \left(\frac{\sigma_m'}{\sigma_{m1}'}\right)^{M+1}\right)$$

这与之らSinghとMitchellの式を含む。

参考文献

Perzyna, P. (1963), Proc. of Vibration Problems, Warsaw, No.3, Vol. 4, pp. 281-289

Roscoe, K.H. & Burland, J.B. (1968), Engineering Plasticity, Cambridge Univ. Press, pp. 539-609



$$F = \frac{\sqrt{2}J_2}{\sigma_m'} + M \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m1}'} = \sqrt{\frac{2}{3}} \left(\frac{\sigma_1' - \sigma_3'}{\sigma_m'} - M \ln \frac{\sigma_m'}{\sigma_{m1}'} \right)$$

Fig. 2