

I. 序論

摩擦性塑性材料、特に土の変形挙動を明らかにする塑性力学の観点から多くの報告がなされるに至ったがその基礎理論となる硬化塑性法則が充分に明らかにされておらず、又、等方硬化を局限硬化する場合においてすら諸問題が残されていると思われる。斯様な現状において、先づ金属塑性その他における従来の参考文献を元に、或いは更に詳察を加えて上記局限硬化下の硬化塑性法則を一応の体系としてみた。更に、本論を Softer than Critical における飽和土に適用すべく、その降伏法則の確立を試みたが、これを確定するに不可欠な情報を得るための適切な実験資料が未だ不十分であることを痛感せられた。しか、これらの資料から予測し得る限りにおいて、先きに導いた硬化法則の適用に際して不可欠な硬化関数その他を決定し、更に降伏条件式の具体的提案を行なった。なお、本論文をお読み頂くに当り、Hill の本¹⁾及び理想塑性材料に関する拙論²⁾を参考にして頂きたい。

II. 等方硬化法則

材料の塑性流動が平均応力 P に無関係な場合については文献(1)にまとめられているが、ここでは、 P 、更には偏応力の 2, 3 次不変量 J_2, J_3 が関与する一般の等方硬化材料、特に土の力学に適用し、詳察する。なお、当然の事ながら、Dilatancy を伴う Denser than Critical の状態は軟化現象であるので、ここに述べる諸論は適用できないことを断つておく。

(1) 硬化降伏面に関する仮定

① いかなる変経路を経てある塑性状態に到達しても、これに対する降伏曲(の形状及びサイズ)はその時の応力状態で一義的に決る。従って、異なる変経路によって到達した 2 つの降伏面は全然、共有交を有しないが、全く同一の応力である。又、ある適当な比例負荷によって硬化状態を進展させることができる。金属塑性では通常、引張又は圧縮試験を行なうが、 P が硬化降伏に関与する上では等方圧縮(圧密)試験を実施するのが最も容易である。② 降伏曲面式は応力に関する有次元数である。従って、降伏曲面式を無次元表示すると唯一に決る。言い換えると、降伏曲は相似形を保持する。③ 硬化の程度は全塑性仕事のみ関数である。

さて、仮定 ① により、降伏条件式は $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = f(P, J_2, J_3) = f(P, r, \sin 3\theta) = C(WP) > 0 \dots (2.1)$ となる。ここに、 $P = \frac{1}{3}\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3$, $S_{if} = \sigma_{if} - P\delta_{if}$, $J_2 = \frac{1}{2}S_{if}S_{if}$, $J_3 = \frac{1}{3}S_{if}S_{if}S_{if}$, $r = \sqrt{J_2}$, $\sin 3\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}J_3/J_2^{3/2}$, $WP = \int \sigma_{if}d\epsilon_{if} \dots (2.2)$ である。なお、硬化を表わすパラメータは C (硬化関数) だけで f に含まれない。又、 C は f と同一次元の応力次元を有する。又、 C をある適当な比例負荷試験における負荷応力値 Y に選べば、この Y に相対する f を相対応力 f とすれば、式 (2.1) は $f(P, J_2, J_3) = Y(WP) > 0 \dots (2.1')$ となる。なお、以下においては一般形 (2.1) 式について考察するが、 f の応力次元を l とし、 $f = \bar{f}$, $C = Y$ とおけば導かれる全式が式 (2.1') に対してもそのまゝ成り立つことは自明である。(なお、本論文においては応力及び変に関する諸量の符号は全て引張正とする)

(2) 塑性歪増分-応力式

塑性歪増分 $d\epsilon_{if}$ が、応力の中立変化 ($df = 0$) に対して、零である条件は $d\epsilon_{if}^p = G_{if}df \dots (2.3)$ で満たされる。ここに、 G_{if} は対称テンソルであり、応力及び歪増分の関数であるが、応力増分の関数ではないとする。ところで、等方性を仮定しているが、塑性歪増分の主軸は応力の主軸と一致せねばならないが、この条件は応力不変量 P, J_2, J_3 の関数である g (塑性ポテンシャル) 及び h により、式 (2.3) を $d\epsilon_{if}^p = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{if}} df = h \frac{\partial g}{\partial \sigma_{if}} C dWP$, $C' = \frac{dC}{dWP} \dots (2.4)$ とおくことにより満足される。以後、塑性ポテンシャル面についても降伏面における仮定 ② と同等のことが成り立つと仮定する。従って、 $G_{if} = \frac{\partial g}{\partial \sigma_{if}} = \pi g (\pi: g \text{ の応力次数})$ が成り立ち、これを式 (2.4) に用いると $\pi C' g h = 1$ なる関係を得る。これにより、式 (2.4) は $d\epsilon_{if}^p = \frac{1}{\pi g} \frac{\partial g}{\partial \sigma_{if}} \frac{df}{C'} \dots (2.5)$ となる。又、降伏曲面と塑性ポテンシャル面は同じ位置のところに相対するが、 $g = f$ と仮定すれば、 $d\epsilon_{if}^p = \frac{1}{\pi f} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{if}} \frac{df}{C'} \dots (2.6)$ となる。本式において $\frac{1}{\pi f} \frac{df}{C'} = d\lambda > 0 \dots (2.7)$ とおけば、 $d\epsilon_{if}^p = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{if}} d\lambda = (\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial P} \delta_{if} + \frac{\partial f}{\partial J_2} S_{if} + \frac{\partial f}{\partial J_3} t_{if}) d\lambda = (\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial P} \delta_{if} + \frac{\partial f}{\partial r} \frac{S_{if}}{r} + \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta} u_{if}) d\lambda \dots (2.8)$ となる。ここに、 $t_{if} = S_{if}S_{if} - \frac{2}{3}J_2\delta_{if}$, $u_{if} = \frac{\sqrt{3}}{4}J_2^{-3/2}(3J_3S_{if} - 2J_2t_{if}) \dots (2.9)$ である。

(3) 塑性仕事増分

$f = g$ とし塑性仕事増分 dWP について詳察しよう。式 (2.8) を用いて $dWP = \sigma_{if}d\epsilon_{if}^p = \pi f d\lambda = (P \frac{\partial f}{\partial P} + 2J_2 \frac{\partial f}{\partial J_2} + 3J_3 \frac{\partial f}{\partial J_3}) d\lambda = (P \frac{\partial f}{\partial P} + r \frac{\partial f}{\partial r}) d\lambda \dots (2.10)$ を得る。次に、 dWP の応力不変量及び塑性歪増分不変量による表現について考察を進めよう。ここでは歪増分不変量として $dV = d\epsilon_{if}d\epsilon_{if}$, $dE = (d\epsilon_{if}d\epsilon_{if})^{1/2}$, $d\epsilon_f = (d\epsilon_{if}^p d\epsilon_{if}^p)^{1/2}$, $dE_s = (d\epsilon_{if}^p d\epsilon_{if}^p d\epsilon_{if}^p)^{1/3} \dots (2.11)$ を用いる。ここに、 $d\epsilon_{if}^p = d\epsilon_{if} - \frac{1}{3}dV\delta_{if}$ であり、又、 $dE, d\epsilon_f$ 及び dE_s はそれぞれ、 $G = (G_{if}G_{if})^{1/2}$, r 及び $S = (3J_3)^{1/3}$ に対応するように入れば歪増分不変量

である。なお、これらの諸量の弾性及び塑性成分を区別する際には、*Superfix* *R*と σ を付する。さて、 dW^P を不変量表示する方法として式(2.11)に式(2.8)を代入して得られる式と $\frac{\partial f}{\partial P} dP, \frac{\partial f}{\partial J_2} dJ_2, \frac{\partial f}{\partial J_3} dJ_3$ について解いてこれらを変換表示した結果を式(1.10)に代入することが考えられる。しかし、 $\frac{\partial f}{\partial P} dP$ は dV^P …(2.12)は容易に得られるが、これ以外については既記 λ^* に示すように本法では一般に解けない。従って、次に別の観点から考察しよう。図-1には P 軸に垂直な面による降伏曲面 C 及び塑性増分の面の切

線上に作用する諸不変量の状態(斜上方から見た)を示す。同図を参照して $\vec{G}$ と $d\vec{E}^P$ のなす角を δ とすると $dW^P = \vec{G} \cdot d\vec{E}^P = G \cdot dE^P \cos \delta = G \cdot dE^P \{ \cos \alpha \sin \beta + \sin \alpha \cos \beta \}$
 $\cos(\psi - \theta) = P dV^P + r dE^P \cos(\psi - \theta) \dots (2.13)$ となる。又、 θ 及び ψ は、 $\theta = \tan^{-1}(\frac{\mu}{\sqrt{3}}) = \tan^{-1}\{\frac{2G_2 - G_1 - G_3}{\sqrt{3}(G_2 - G_3)}\} = -\frac{1}{3} \sin^{-1}\{\sqrt{3}(\frac{r}{P})^2\}$, $\psi = \tan^{-1}(\frac{P}{r}) = \tan^{-1}\{\frac{P dE^P - dE^P}{\sqrt{3}(dE^P - dE^P)}\} = -\frac{1}{3} \sin^{-1}\{\sqrt{3}(\frac{dE^P}{dE^P})^2\} \dots (2.14)$ である。 μ, ν はLodeの

パラメータである。本式を式(2.13)に用いると $dW^P = P dV^P + r dE^P \cos[\frac{1}{3}\{\sin^{-1}(\sqrt{3}(\frac{r}{P})^2) - \sin^{-1}(\sqrt{3}(\frac{dE^P}{dE^P})^2)\}] \dots (2.15)$ となり、不変量表示が可能である。

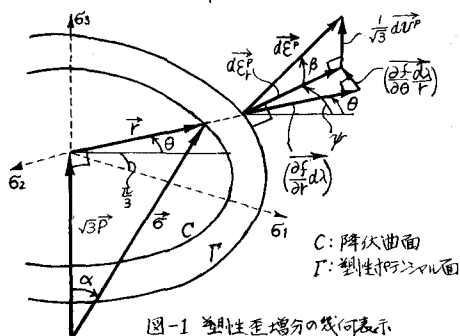


図-1 塑性増分の幾何表示

(3) 相当歪硬化説について (1)節において仮説③“硬化の程度は全塑性仕事関数の関数”を採用したが、硬化に関するもう一つの仮説“硬化の程度は相当塑性増分 $d\vec{E}^P$ の集積値の関数”： $f(P, J_2, J_3) = H(\int d\vec{E}^P) \dots (2.16)$ がある。処で、一般には dW^P (或いは $d\lambda$)は $f(P, J_2, J_3)$ と $d\vec{E}^P$ だけの関数ではないので(式(2.10), (2.15)参照)、両仮説は一致せず、 $C(W^P)$ を $H(d\vec{E}^P)$ とする取り扱い易い形に置きかえることとできない。両仮説が一致する特別な場合として金属塑性における $f(J_2)$ 、 $d\vec{E}^P = dE^P$ は周知の通りである。他の特別な場合として $f = aP + b\sqrt{J_2}$ (a, b : 材料定数)…(2.17)の場合には式(2.12)より $d\lambda = \frac{1}{2} dV^P \dots (2.18)$ となり、これを式(2.1), (2.10)に考慮すると $f = C(\frac{r}{2} dV^P) \rightarrow f = H(\frac{r}{2} dV^P)$ となるので、両仮説は一致し、 dV^P を $d\vec{E}^P$ として採用し得る。更に、式(2.17)の改良された場合として $f = aP + b\sqrt{J_2} \dots (2.19)$ の場合には既記 λ^* 式(1a)より $d\lambda = \frac{2}{3} dE^P \dots (2.20)$ となるので、 dV^P と dE^P のいずれも $d\vec{E}^P$ として用い得るようになる。この特別な場合の降伏曲面は直錐面(式(2.19)の場合は円錐面)であるが、新標る材料が存在するか否かは疑である。Palmer³⁾の湿潤塑性土の3軸圧縮状態に対する提案式もこれに属する。又、Ext d, Mises則等も形式的にはこれに属すが、実際には硬化現象であり、問題外である。

(4) 弾性歪(増分)について 弾性歪 E_{ij}^E は一般に、弾性ポテンシャル歪エネルギー関数 $W(P, J_2, J_3)$ により $E_{ij}^E = \frac{\partial W}{\partial \epsilon_{ij}} \dots (2.21)$ で与えられる。Hooke弾性の場合には $W = \frac{J_2}{2G} + \frac{3(1-2\nu)}{2E} P^2$, $dE_{ij}^E = \frac{dJ_2}{2G} + \frac{1-2\nu}{E} P dP$ …(2.22)であることは周知の通りである。処で、一般の非Hooke弾性体では式(2.8)との類似により $E_{ij}^E = \frac{1}{3} \frac{\partial W}{\partial P} \delta_{ij} + \frac{\partial W}{\partial J_2} \epsilon_{ij} + \frac{\partial W}{\partial J_3} \epsilon_{ij} \epsilon_{ij} \dots (2.23)$ となり、一般に非線形の問題となる。

(5) 平面歪問題について 一般の応力或いは歪状態では弾性歪及び塑性歪増分の主軸は主応力軸に一致するが、弾性歪増分の主軸はこれと一致せず、応力増分の主軸に一致する。処で平面問題では無歪或いは無応力の主方向は全ての諸量の主方向である(例えば、平面歪問題では無歪(増分)の主軸は等方性の仮定に於ける主軸である。平面応力問題ではこれの逆が成り立つ)。さて、後論²⁾に述べたように弾性歪を考慮しない場合には、無歪の主方向の応力及び塑性歪増分を G_2, dE_2^P とすると平面歪条件は式(2.8)より $dE_2^P(P, \sqrt{J_2}, \mu) = 0 \dots (2.24)$ と表わ

既記 λ^* 式(2.8)の諸式を式(1.11)に用いると② $\frac{\partial f}{\partial J_2}, \frac{\partial f}{\partial J_3}$ の場合： $dE_2^P = [2J_2(\frac{\partial f}{\partial J_2})^2 + 6J_3(\frac{\partial f}{\partial J_2})(\frac{\partial f}{\partial J_3}) + 3J_3^2(\frac{\partial f}{\partial J_3})^2]^{1/2} d\lambda$, $dE_3^P = [J_2(\frac{\partial f}{\partial J_2})^2 + 3J_3(\frac{\partial f}{\partial J_2})(\frac{\partial f}{\partial J_3}) + J_3J_3(\frac{\partial f}{\partial J_2})(\frac{\partial f}{\partial J_3}) + (J_2 - \frac{2}{3}J_3^2)(\frac{\partial f}{\partial J_3})^2]^{1/2} d\lambda \dots (1a)$ ③ $\frac{\partial f}{\partial P}, \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta}$ の場合： $dE_2^P = [(\frac{\partial f}{\partial P})^2 + (\frac{3}{2} \cos 3\theta \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta})^2]^{1/2} d\lambda$, $dE_3^P = [-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})^2 - 3\frac{\cos 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})^2(\frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta}) + 9\frac{\sin 3\theta \cos 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})(\frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta})^2 + 9\frac{\cos^2 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta})^3]^{1/2} d\lambda \dots (1b)$ ④ $\frac{\partial f}{\partial P}, \frac{\partial f}{\partial \theta}$ の場合：式(1b)に $\frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta} = \frac{1}{3 \cos 3\theta} \frac{\partial f}{\partial \theta}$ の関係を用いて $dE_2^P = [(\frac{\partial f}{\partial P})^2 + (\frac{1}{3} \frac{\partial f}{\partial \theta})^2]^{1/2} d\lambda$, $dE_3^P = [-\frac{\sin 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})^2 - \frac{\sqrt{3}}{2} \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})^2(\frac{\partial f}{\partial \theta}) + \frac{3}{2} \frac{\sin 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial P})(\frac{\partial f}{\partial \theta})^2 + \frac{\cos 3\theta}{\sqrt{3}}(\frac{\partial f}{\partial \theta})^3]^{1/2} d\lambda \dots (1c)$ を得る。以上の諸式は f が与えられた場合の塑性歪増分不変量 dE^P 及び dE_2^P の表示式である。ところで、

これらの3組の式はいずれも $\frac{\partial f}{\partial J_2} dJ_2, \frac{\partial f}{\partial J_3} dJ_3, \frac{\partial f}{\partial P} dP$ 等に関する少くとも6次以上の方程式で構成されているので、直接これらの解を求めることは不可能であろう。そこでこれらの諸式に式(2.15)を併用すると解を求めることができる。式(1.10), (1.12), (1.13)より、塑性仕事増分の偏微成分 $dW^P = 2J_2 \frac{\partial f}{\partial J_2} + 3J_3 \frac{\partial f}{\partial J_3} d\lambda = r \frac{\partial f}{\partial P} d\lambda = r dE^P \cos(\psi - \theta) \dots (2)$ となる。従って $\frac{\partial f}{\partial P} d\lambda = dE^P \cos(\psi - \theta) \dots (3)$ と不変量表示が可能で、更に式(3)を式(1c)の第1式に用いると $\frac{\partial f}{\partial \theta} d\lambda = 3 \cos 3\theta \frac{\partial f}{\partial \sin 3\theta} d\lambda = d\lambda = r dE^P \sin(\psi - \theta) \dots (4)$ と不変量表示が可能である。 $\frac{\partial f}{\partial J_2} dJ_2$ 及び $\frac{\partial f}{\partial J_3} dJ_3$ についてと同様に求め得る。

される。ここに、 $P' = \frac{1}{2} G_1 + G_2 = \frac{1}{2} (G_1 + G_2)$, $\sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2} S_{ij} S_{ij}} = \left(\frac{G_1 - G_2}{2} \right)^2$, $S_{ij} = G_{ij} - P' \delta_{ij}$; $i, j = x, y$ である。一方、式(2.1)も $f(P', \sqrt{J_2}, \mu) = C(W)$ (2.25) と表わされ、これに式(2.24)を用いて μ を消去すれば、平面歪における降伏条件式 $f(P', \sqrt{J_2}) = C(W)$ (2.26) が得られる。これは、塑性歪増分は $d\epsilon_{ij}^p = \left(\frac{\partial f}{\partial P'} \frac{\delta_{ij}}{2} + \frac{\partial f}{\partial \sqrt{J_2}} \frac{S_{ij}}{2\sqrt{J_2}} \right) d\lambda$ (2.27) となる。ここで、弾性歪増分を考慮すると平面歪条件式(2.24)は上述の3つの量の他に、応力増分の関数となる。これは理論展開上、或は実際計算上、非常に難解な面を生ずる。このことは幾何学的には弾性歪を無視する場合に f が与えられると、それに対する μ 値が決定されて平面 $G_2 = P' + \mu/\sqrt{J_2}$ が定まり、この平面と降伏曲面との交線(3次元主応力空間において降伏曲面の G_1-G_2 面への射影の際の接線)が平面歪の応力状態を与える。一方、弾性歪(増分)を考慮すると甚々複雑な面(一般には曲面となる)は変化する。以上の理由から、平面歪問題を取り扱う場合には弾性歪(増分)は無視せざるを得ない。

Ⅲ. 土の力学へ硬化法則に相当するに当っての基礎的諸問題 本章では前章で詳述した諸論を土の力学に適用する際に不可欠な基礎事項、或いは次章で降伏関数 f を決定する際に予め明らかにしておくべき事項について詳察しておく。なお、前章(1)節で一般塑性材料に対して3つの仮定を立てたが、更に土に関しては次の仮定を設ける：仮定④ 主応力空間における降伏曲面は、原点に関して対称性を維持する。従ってある比例負荷 ($\frac{P}{V} = \text{const.}$, $\theta = \text{const.}$) において通過する降伏曲面上の要の法線の方向は一定である。又、原点を通るいかなる線分もある2つの降伏曲面によって分断される際、その原側側の長さ 2 曲面間の長さの比は一定である。なお、本仮定は正規圧縮応力が零の時、強度を有さないとはみなせる上に對しては真である。又、この仮定により、理論を大中に簡明化し得る。

(1) 硬化率の決定 ある塑性状態において応力値が与えられた、塑性歪増分 $d\epsilon_{ij}^p$ の方向が定まるが、その大きさを決定するには与えられた応力増分値 $d\sigma_{ij}$ に従う $d\epsilon = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} = d\epsilon^e + d\epsilon^p$ の微分関係、 R, P, V の硬化率 $Y' = \frac{dY}{dW^p}$ (3.1) をある適當な式(硬化率)から決定する問題が残る。さて、仮定①の如く述べたように本決定に際して正規圧縮試験を採用すれば、正規圧縮圧力を P_0 とし、式(2.1)及び(3.1)は $f(P, J_2, J_3) = -P_0(W^p) > 0$ (3.2), $Y' = -\frac{dP_0}{dW^p}$ (3.3) となる。さて、一般に行われるように図-2の体積 V -圧縮圧力 $\log(-P)$ 表示の正規圧縮及び除荷・負荷線が直線となると仮定し、正規圧縮線: $V_0 = V_N - \lambda \log(-P_0)$ (3.4), 除荷・負荷線: $V = V_E - K \log(-P)$ (3.5) としよう。ここに、 V_N, λ, K は材料定数であるが、 V_E は $V_E = V_N - (\lambda - K) \log(-P_0)$ (3.6) なる変数である。なお、正規圧縮状態の V 及び dV を P_0 と同様、 V_0 及び dV_0 として記述すれば、式(3.4)より、 $dV_0 = \frac{dV_0}{V_0} = -\frac{\lambda}{V_0} \frac{dP_0}{P_0}$ (3.7) となる。他方、等方応力状態における弾性体積歪増分は式(3.5)より $dV^e = \frac{dV^e}{V} = -\frac{K}{V} \frac{dP}{P}$ (3.8) となる。式(3.7)及び(3.8)より $dV_0^p = dV_0 - dV_0^e = -\frac{\lambda - K}{V_0} \frac{dP_0}{P_0}$ (3.9) となる。式(3.9)より正規圧縮状態における塑性化率増分は $dW^p = P_0 dV_0^p = -\frac{\lambda - K}{V_N - \lambda \log(-P_0)} \cdot P_0 dP_0$ となり、本式を式(3.3)に用いると硬化率 $Y' = \frac{V_N - \lambda \log(-P_0)}{\lambda - K}$ (3.10) を得る。

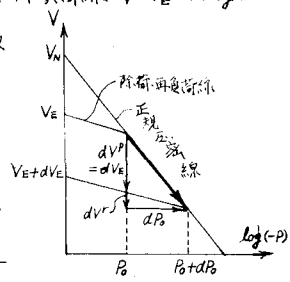


図-2 圧縮試験図

(2) 塑性歪増分-応力式 上に得られた硬化率式(3.10)を式(2.6)に用いると塑性歪増分-応力式 $d\epsilon_{ij}^p = \frac{\lambda - K}{V_N - \lambda \log f}$ (3.11) を得る。本式により応力及びその増分が指定されれば、塑性歪増分 $d\epsilon_{ij}^p$ を決定できることになる。

(3) 弾性歪増分について 土の場合には式(3.8)を認めるれば、等方圧縮の場合及び弾性歪(増分)-応力(増分)関係に一次線型性は期待できず、非Hooke弾性体と考へざるを得ない。しかし、本関係に対する充分な説明はなされておらず、目下の処、いかなる条件下でも(偏差応力の作用下でも)、式(3.8)が成り立つと考へ、本式に示される弾性成分のみを考へる実状である。これは式(2.24)において弾性歪の体積歪成分のみを考へ、その偏差成分 $\frac{\partial W}{\partial J_2} S_{ij} + \frac{\partial W}{\partial J_3} T_{ij}$ を無視し、更に W が等方応力 P の項と偏差応力 J_2, J_3 の項の和の項になるに考へていることになる。或いは更に簡単に $W(P)$ と考へていることになる。さて、更に、厳密な弾性歪については莫大の弾性の充分な検討がなされる時、或る理論に組み入れると、ここで、式(3.8)に基づく弾性歪増分のみが可能であるという、ある既知の弾性状態 $P = P_0, K = 0, V = V_0$ に対する P_0 は $\log(-P_0) = \frac{V_N - V_0 - K \log(-P_0)}{\lambda - K}$ (3.12) で与えられる。さて、 $\log \frac{P}{P_0} \leq 0$ なる弾性限内では式(3.5)より $V = V_0 - K \log \left(\frac{P}{P_0} \right)$ であるから弾性歪増分は $d\epsilon_{ij}^e = \frac{1}{3} dV^e \delta_{ij} = -\frac{1}{3} \frac{K}{V_0 - K \log \left(\frac{P}{P_0} \right)} \frac{dP}{P}$ (3.13) で与えられる。 $\log \frac{P}{P_0} > 0$ 且つ $-dP > 0$ なる塑性状態では $V = V_N - \lambda \log(-P) + K \log \left(\frac{P}{P_0} \right) = V_N - (\lambda - K) \log f - K \log(-P)$ であるので $d\epsilon_{ij}^e = -\frac{1}{3} \frac{K}{V_N + (K - \lambda) \log f - K \log(-P)} \frac{dP}{P} \delta_{ij}$ (3.14) となる。

(4) 3軸圧縮状態について 従来、本状態に関する実験データが最も多いので基礎的考察を予ておく。 $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ であるから、 $P = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)$, $r = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_2)$, $S = -\frac{2}{\sqrt{3}}(\sigma_1 - \sigma_2) = -\frac{2}{\sqrt{3}}r$ (3.15) となり、式(2.14)より $\theta = \frac{\pi}{6}$ である。又これを附注の式(1b)に用いると $d\epsilon_p^p = \frac{2}{3} \frac{dr}{r}$, $d\epsilon_s^p = -\frac{2}{3} \frac{dr}{r}$ (3.16) となり、 $\psi = \theta = \frac{\pi}{6}$ となる。これは幾何学的には応力ベクトルの方向が塑性歪増分ベクトルの方向に一致することを意味するが、等方性の仮定により降伏曲面が主応力軸に関して対称なことから当然である。従って本状態では応力の独立な変数は2個だけ、例えは、 P, r のみであるから降伏曲線は式(3.2)より $f(P, r) = -P_0(W^p)$ (3.17) として考えられる。又、塑性仕事増分は式(2.15)より、 $dW^p = P dV^p + r d\epsilon_p^p$ (3.18) となる。さて、仮定④により、本状態における降伏関数 $f(P, r)$ の形は $\eta = \frac{r}{P}$ (3.19) により、一般的に決まるので、式(3.17)は $f(P, \eta) = -P_0(W^p)$ (3.20) となる。これにより、 $d\epsilon_p^p = \frac{2}{3} \frac{dr}{r} = \frac{2}{3} \frac{d\eta}{\eta}$, $dV^p = \frac{2}{3} \frac{dr}{r} = (-7) \frac{2}{3} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{dr}{r}$ (3.21) となり、 $\frac{d\epsilon_p^p}{dV^p} = -\frac{dP}{d\eta} = \frac{\frac{2}{3} \frac{d\eta}{\eta}}{(-7) \frac{2}{3} \frac{d\eta}{\eta} + \frac{dr}{r}}$ (3.21) なる関係式を得る。

IV. 土の降伏条件式 本章では前章に於いて残されていた最後の問題、降伏条件式について詳察する。

(1) Critical State Surface (C.S.S.) について Roscoe は土が充分大きな変形を受けた後には体積変化は停止し、形状変形のみに進行すると、更に斯様な状態では η 値が土性による定値をとることを見出し、Critical State と名付けている。これは仮定④の妥当性を裏付けるものと解される。又、斯様な状態は硬化 ($dV < 0$) から軟化 ($dV > 0$) への過渡領域 ($dV = 0$) と考えられる。従って、軟化の極限の状態とみなされる C.S.S. は根拠²⁾ 明らかに軟化状態に対流する降伏則において $C_0 = 0$, $\sin \phi_0 = \frac{3M_c}{2\sqrt{3} + M_c}$ ($M_c = (\eta)_{C.S.}$) として、 $\eta = -\frac{3M_c}{2\sqrt{3} + M_c} [G_4' - \sin \phi_0 H_4']^{-\frac{1}{2}}$, $G_4' = \frac{\sqrt{3}(M_c^2 + A^2) + 36M_c^2 A^2}{64A^2}$, $H_4' = \frac{9M_c(M_c^2 + A^2)}{16A^2}$, $A = 2\sqrt{3} + M_c$ (3.22) で表現される。

(2) 降伏則設定に際しての条件 従来、実験データから降伏則設定に際して提供し得るのは次の3条件のみである。② 正規圧縮において $\frac{d\epsilon_p^p}{dV^p} = 0$, ③ C.S. において $\frac{d\epsilon_p^p}{dV^p} \rightarrow -\infty$ ④ 3軸状態の C.S. limit を $V = V_c - \lambda \log(P - P_s)$ とすれば、 $\frac{P_0}{P_s} = e^{-\frac{V_c - V_0}{\lambda}} (=l \text{ とおく})$ (3.23) を満たさなければならない。さて、これらの条件は降伏曲面の両極限状態に関するものであり、その中間域の条件を規定し得ない実状では降伏則を唯一に確定し得ないが以下にこれらの3条件を考慮し、考察を進める。

(3) 3軸圧縮状態における降伏則の考察 本状態に対する降伏則として過去に提案されたものとして Roscoe⁴⁾ 他、Burland⁵⁾ 及び Palmer⁶⁾ の諸則がある。Roscoe 他及び Palmer のは条件②或いは③に反し、論外であろう。処で、Burland 則は条件②及び③を満たし、又、④に於いては $l = 0.5$ と定値を与えている。彼は $dW^p = -P[(dV^p)^2 + M_c d\epsilon_p^p]^2$ (3.24) と仮定し、本式と式(3.18)より、 $\frac{d\epsilon_p^p}{dV^p} = \frac{2}{M_c \eta^2}$ (3.25) を得、これから降伏曲線 $f = -P \frac{M_c^2 + \eta^2}{M_c^2} = -P_0$ (3.26) を提案している。さて、条件②③を満たす塑性仕事増分式は(3.24)が唯一ではなく無数のものが考えられる。例えは、Simple なものとして $dW^p = -P[(dV^p)^2 - P r dV^p d\epsilon_p^p + (M_c d\epsilon_p^p)^2]$ (3.27) と仮定すれば、 $\frac{d\epsilon_p^p}{dV^p} = \frac{7}{M_c \eta^2}$ (3.28) となり、降伏則 $f = -P C \frac{7^2}{M_c^2} = -P_0$ (3.29) を得る。本式の方が Parry⁶⁾ 等の実験値には皆合うと思われる。又、条件④については $l = \frac{1}{\sqrt{e}}$ と定値である。しかし、斯様に土性による条件④の l が定値になるか否かについては詳細な検討を要しよう。

(4) 3次元降伏条件式 前節で述べたように、局限された3軸状態における降伏曲線を確定し得ない実状であるが、差し当り、上に見出された Burland 式及び式(3.27)について、これらを(1)節で考察した C.S.S. 満たすように3次元状態へ拡張しよう。なお、その前提として “ $l = \frac{P_0}{P_s}$ は土性による、又、 θ 値による定値である” と仮定する。本仮定は条件④を再限定するものであり、又、これが妥当なものであるか否かは更に検討を要するが、理論と実証化の相意味でこれを認めて論を進めることにする。 M_c を式(3.22)の η におかして Burland 式の拡張: $f = -P \left[\left(\frac{3M_c}{2\sqrt{3} + M_c} \right)^2 (G_4' - \sin \phi_0 H_4')^{-\frac{1}{2}} + \eta^2 \right] / \left[\left(\frac{3M_c}{2\sqrt{3} + M_c} \right)^2 (G_4' - \sin \phi_0 H_4')^{-\frac{1}{2}} \right] = -P_0$ (3.30) 及び式(3.29)の拡張: $f = -P \exp \left[-\frac{7^2}{2} \left(\frac{2\sqrt{3} + M_c}{3M_c} \right)^2 (G_4' - \sin \phi_0 H_4')^{-\frac{1}{2}} \right] = -P_0$ (3.31) を得る。

V. 結語 以上、摩擦性塑性材料特異土の塑性法則を一般の力学系としてまとめ得たと思う。しかし、土の力学の中心課題である降伏則等を確定し得ないことが、残りの問題であるが、今後実験値との照査を行いつつ、一筋の詳察を行いたい。処で、実際材料を定式化する際にその実質特性の確かなデータが不可欠であるが、実験者の主観に即る都合の悪い、不確かなデータが示されている。例えは、Roscoe 則が示した時度ではそれと合う様なデータが示され (Roscoe, Schofield, 太田他)、又、Burland 則が示せばそれと合うようなデータ (Roscoe 他) が示される実状である。

ここに、確定し得ない諸問題点については、今後、客観的事実により忠実な実験値の提供に期待したい。
(参考文献) 1) Math. Theo. Plasticity, 2) 土木学会論文集, 199号, 3) Géotech. Vol. 17, 4) Géotech. Vol. 13, 5) Géotech. Vol. 15, 6) Géotech. Vol. 10