III-23 砂の強度特性の微視的考察

埼玉大学理工 正員 小田匡寛

1 まえがき

砂はごく低い主応力比で降伏するので，ピーク強度までの耐圧強度増加は内部構造の変化に因る歪硬化現象で説明される。構造変化の微視的機構は粒子間のすべりのみならず回転をも伴い，複雑な様相を呈する[5),6),8),9)]。この報告では"主要な微視的変形機構は粒子間のすべりであり，回転成分による影響は無視できる"ものと仮定し，力学的かつ統計的なGranular modelを提案する。またこのGranular Modelから導かれる巨視的特性がどの程度砂の変形・強度特性を説明し得るかを示す。

2 主応力比と構造特性との関係

砂のピーク強度までの耐圧強度増は粒子間接点（C_i）での接平面への法線方向（N_i）が圧縮方向（σ_1あるいはZ軸方向）へ集中する傾向に起因している[4),5),6),8),9)]（図-1）。この事実は次のように説明できる。σ_1と一致する方向（すなわち$\beta_i=0°$）にN_iを持つ接点であれば，接点に作用するσ_1に平行な力の成分F_{zi}を支持するのに有効な接点であり，一方$\beta_i=90°$とする接点においては力の成分F_{zi}を支持するのに不利な接点と考えられる。F_{zi}は1つの確率変数とみなされるべきものであるが，F_{zi}の平均値$\bar{F}_{zi}$は$\beta_i=0°$で最大値，$\beta_i=90°$で最小値となるβ_iの函数とみなされよう。そこで，平均値$\bar{F}_{zi}$を接点C_iにおける接触面積（ΔS_i）のXY－平面への投影面積（$\Delta S_i\cdot|\cos\beta_i|$）に比例すると仮定し，$\bar{F}_{zi}$を$\beta_i$の函数として次式で与える。

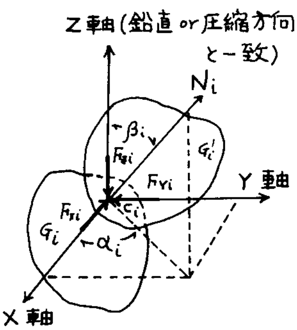


図-1 座標軸と法線方向N_i

$$\bar{F}_{zi} = k_z\cdot\Delta S_i\cdot|\cos\beta_i| \quad\cdots\cdots\cdots(1)$$

同様に$\bar{F}_{xi}$，$\bar{F}_{yi}$を次式で与える。

$$\left.\begin{aligned}\bar{F}_{xi} &= k_x\cdot\Delta S_i\cdot|\sin\beta_i\cdot\cos\alpha_i|\\ \bar{F}_{yi} &= k_y\cdot\Delta S_i\cdot|\sin\beta_i\cdot\sin\alpha_i|\end{aligned}\right\}\cdots\cdots(2)$$

粒子$G_1, G_2, \cdots, G_n$は単位立方体内にその各々の重心をしめる粒子で，かつ接点$C_1, C_2, \cdots, C_n$で単位立方体外にある粒子$G_1', G_2', \cdots G_n'$と接している。各接点における接平面への法線方向を$N_1, N_2 \cdots N_n$とする（図-2）。もしnが十分に大きければ，接点$C_1, C_2, \cdots C_n$に作用するZ軸方向の力の合計（$\sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{zi}$）は近似的に$\sigma_1\times1^2$に等しいので次式を得る。

$$\sigma_1^2 = \sum_{i=1}^{n}\bar{F}_{zi} = k_z\cdot n\cdot\overline{\Delta S}\cdot\overline{|\cos\beta_i|} \quad\cdots\cdots(3)$$

ここで$\overline{\Delta S}$はΔS_iの平均値とし，$\overline{|\cos\beta_i|}$は$|\cos\beta_i|$の平均値で，次式で与えられる（$E(\alpha,\beta)=N_i$の確率密度函数[3),7)]）

$$\overline{|\cos\beta_i|} = \int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}|\cos\beta|\,E(\alpha,\beta)\sin\beta\,d\alpha\,d\beta \quad\cdots\cdots(4)$$

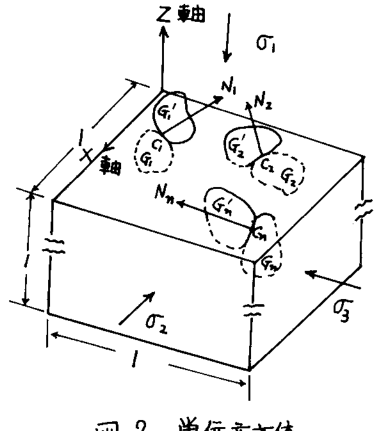


図-2 単位立方体

(1), (3), (4)式から比例定数k_zは次式で求められる。

$$k_z = \frac{\sigma_1}{\overline{\Delta S}\cdot n\cdot\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}E(\alpha,\beta)\,|\cos\beta|\cdot\sin\beta\,d\alpha\,d\beta} \quad \cdots(5)$$

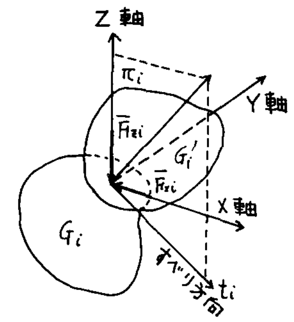
X, Y軸方向に関する同様な検討から次式を得る。

$$k_x = \frac{\sigma_2}{\overline{\Delta S}\cdot n\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}E(\alpha,\beta)\,|\sin\beta\cdot\cos\alpha|\,\sin\beta\,d\alpha\,d\beta}$$

$$k_Y = \frac{\sigma_3}{\overline{\Delta S}\cdot n\int_0^{\pi}\int_0^{2\pi}E(\alpha,\beta)\,|\sin\beta\cdot\sin\alpha|\,\sin\beta\,d\alpha\,d\beta} \quad \cdots(6)$$

ここで先に導入した構造特性を表わすパラメーター[5),8)] S_x, S_Y, S_z を使えば、(5), (6)式は簡単な次式であらわされる。

$$k_x = \sigma_2/S_x \;,\quad k_Y = \sigma_3/S_Y \;,\quad k_z = \sigma_1/S_z \quad \cdots\cdots(7)$$



π_i：Z軸, N_i, X軸, t_iを含む面

図-3 座標軸の選定

さて1つの接点C_i（図-3）に注目しよう。$\sigma_1>\sigma_2=\sigma_3$の場合における$N_i$の分布は$\sigma_1$方向に対称軸を持った軸対称分布となるので、X軸はXY-平面上に任意に選べる。粒子間のすべりはN_iとZ軸を含む平面内(π_i)に発生する[1)]ので、X軸をこの平面内にとれば$\alpha_i=0°$となり、$\overline{F}_{xi}, \overline{F}_{Yi}, \overline{F}_{zi}$は(1), (2), (7)式から次のように与えられる。

$$\overline{F}_{xi} = \frac{\sigma_3\cdot\Delta S_i\cdot\cos\beta_i}{S_x} \;,\quad \overline{F}_{Yi} = 0,\quad \overline{F}_{zi} = \frac{\sigma_1\cdot\Delta S_i\cdot\sin\beta_i}{S_z} \quad \cdots(8)$$

ただし、$0\leq\beta_i\leq\frac{1}{2}\pi$ とする。接点C_i（図-3）において粒子G_i'とG_iとがt_i方向にすべるために、$\overline{F}_{xi}$と$\overline{F}_{zi}$とが満たすべき条件式は次式で与えられる。

$$\overline{F}_{zi}/\overline{F}_{xi} = \tan\left(\tfrac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i\right) \qquad \text{ただし、}\ \phi_\mu\leq\beta_i\leq\tfrac{1}{2}\pi \quad \cdots\cdots(9)$$

(9)式に(8)式を代入すれば次式となる。

$$\sigma_1/\sigma_3 = S_z/S_x\cdot\tan\beta_i\cdot\tan\left(\tfrac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i\right) \quad \cdots\cdots(10)$$

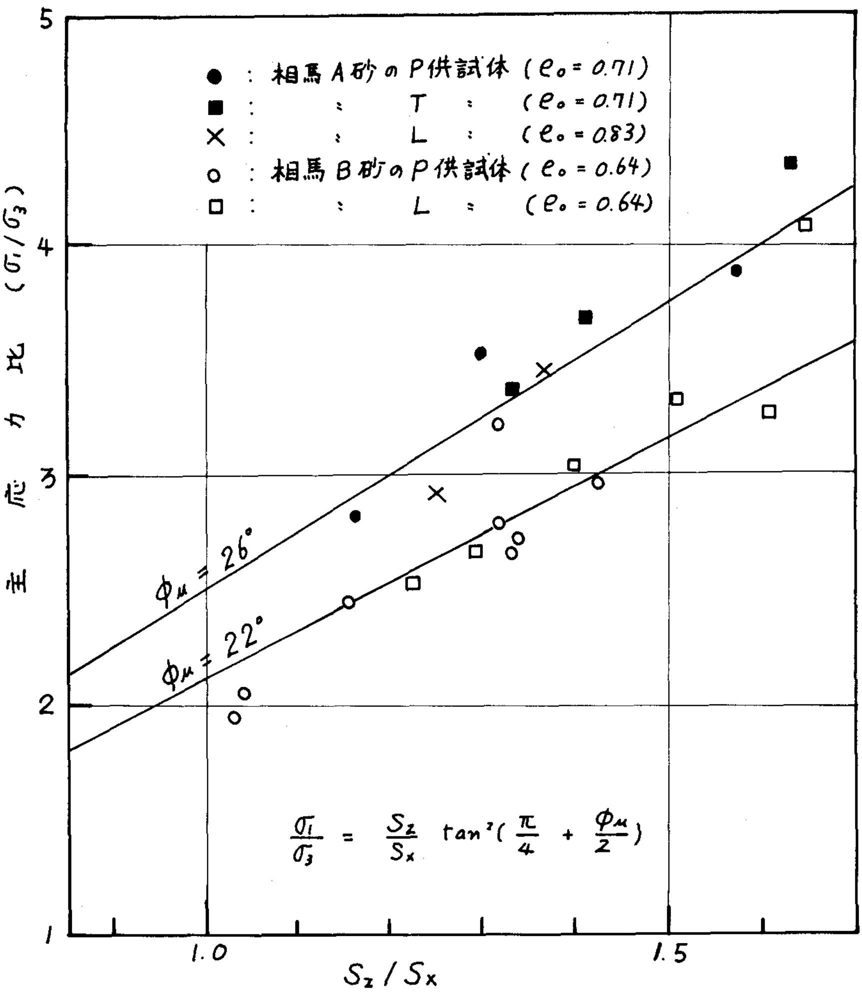
(10)式の右辺を極小にするβ_iの値をβ_cとすれば、あらゆる接点の中でβ_cをN_i方向とする接点においてすべりは最も容易に発生する。砂の微視的構造の安定性はこの接点におけるすべりによって決定されるものとすれば、(10)式にβ_cを代入して得られる理論式によって主応力比と微視的構造特性とは関連ずけられよう。(10)式の右辺は$\beta_c=\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{2}\phi_\mu$で極小となり、(10)式に代入すれば次式となる。

$$\sigma_1/\sigma_3 = S_z/S_x\cdot\tan^2\left(\tfrac{1}{4}\pi+\tfrac{1}{2}\phi_\mu\right) \quad \cdots\cdots(11)$$

図-4はσ_1/σ_3とS_z/S_xとの関係を示している。$\phi_\mu=22°, 26°$とする(11)式を図中の実線で示し、●,■,X O,□は相馬A砂（0.59~0.84mm）とB砂（0.84~1.19mm）の実験値を示している。ϕ_μのそれぞれの値はA, B砂に相応なもので[10)]あり、また実験値は理論直線の示す傾向とよく一致している。(11)式は砂の初期構造・初期間隙比に無関係に成立するものとして導かれたが、実験によってもこのことは証明されている。これらの事実から、砂の構造の安定性はβ_cの方向にN_iを持つ接点において、粒子間接点に作用するX, Z方向の平均的力$\overline{F}_{xi}, \overline{F}_{zi}$がすべりの条件式を満足するかどうかにかかっているといえる。

3 任意の接点におけるすべる確率

これまでの議論ではF_{xi}, F_{zi}の平均値だけを問題にした。しかしより厳密に問題を検討する場合、それらは平均値のまわりに分散する確率変数とみなす必要がある。F_{xi}は平均値を$\overline{F}_{xi}$とし、分散を



図－4 σ_1/σ_3 と S_z/S_x との関係図

$A\left(\frac{\pi^2}{4}-2\right)$とする確率変数とし，その密度函数を次式で与える。

$$f(F_{xi}) = \frac{1}{2A}\cos\frac{1}{A}(F_{xi}-\overline{F}_{xi}) \quad , \quad ただし, \int_{\overline{F}_{xi}-\frac{A\pi}{2}}^{\overline{F}_{xi}+\frac{A\pi}{2}} f(F_{xi})\,dF_{xi} = 1 \quad \cdots (12)$$

同様にしてF_{yi}, F_{zi}の密度函数を次式で与える。

$$f(F_{yi}) = \frac{1}{2B}\cos\frac{1}{B}(F_{yi}-\overline{F}_{yi}) \ , \ f(F_{zi}) = \frac{1}{2C}\cos\frac{1}{C}(F_{zi}-\overline{F}_{zi}) \quad \cdots (13)$$

この時$F_{zi}/F_{xi} \geq \tan(\frac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i)$の不等式を満足する確率$P(\beta_i)$は$\beta_i$方向に$N_i$を持つ接点$C_i$においてすべりが発生する確率を定義する。$F_{xi}$, F_{zi}は独立変数とみなせるので$P(\beta_i)$は次式となる。

$$P(\beta_i) = \int_{\overline{F}'_{xi}-\frac{\pi}{2}A'}^{\overline{F}'_{xi}+\frac{\pi}{2}A'} f(F'_{xi})\,dF'_{xi} \cdot \int_{F'_{xi}}^{\overline{F}_{zi}+\frac{\pi}{2}C} f(F_{zi})\,dF_{zi} \quad \cdots\cdots (14)$$

ただし，$F'_{xi} = F_{xi}\cdot\tan(\frac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i)$，$\overline{F}'_{xi} = \overline{F}_{xi}\cdot\tan(\frac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i)$とする。

変数F'_{xi}及びF_{zi}の分散を実験的に求めることは極めて困難なので，ここでは直感的に，分散はその

変数の平均値に比例するものと仮定する。すなわち，$A'=K\bar{F}_{xi}'$，$C=K\bar{F}_{zi}$　となる。

(12)，(13) 式を(14)式に代入し，積分すれば次式を得る。

1）$\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\dfrac{S_x}{S_z}\leq G(\beta_i)\dfrac{1-\frac{\pi K}{2}}{1+\frac{\pi K}{2}}$ の場合

$$P(\beta_i)=0 \quad\cdots\cdots(15)$$

2）$G(\beta_i)\dfrac{1-\frac{\pi K}{2}}{1+\frac{\pi K}{2}}<\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\dfrac{S_x}{S_z}\leq G(\beta_i)$ の場合

$$P(\beta_i)=\frac{1}{4}\left\{\sin\frac{1}{K}\left(R_1+\frac{\pi K}{2}R_1-1\right)+1\right\}-\frac{R_1^2}{4(R_1^2-1)}\left\{\sin\frac{1}{K}\left(R_1+\frac{\pi K}{2}R_1-1\right)+\sin\frac{1}{K}\left(R_2-\frac{\pi K}{2}R_2-1\right)\right\}\cdots(16)$$

3）$G(\beta_i)<\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\dfrac{S_x}{S_z}\leq\dfrac{1+\frac{\pi}{2}K}{1-\frac{\pi}{2}K}$ の場合

$$P(\beta_i)=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\left\{\sin\frac{1}{K}\left(R_1-\frac{\pi K}{2}R_1-1\right)\right\}-\frac{R_1^2}{4(R_1^2-1)}\left\{\sin\frac{1}{K}\left(R_1-\frac{\pi K}{2}R_1-1\right)+\sin\frac{1}{K}\left(R_2+\frac{\pi K}{2}R_2-1\right)\right\}\cdots(17)$$

4）$G(\beta_i)\dfrac{1+\frac{\pi}{2}K}{1-\frac{\pi}{2}K}<\dfrac{\sigma_1}{\sigma_3}\cdot\dfrac{S_x}{S_z}$ の場合

$$P(\beta_i)=1 \quad\cdots\cdots(18)$$

ただし，$R_1=\bar{F}_{zi}/\bar{F}_{xi}'$，$R_2=\bar{F}_{xi}'/\bar{F}_{zi}$，$G(\beta_i)=\tan\beta_i\cdot\tan(\frac{1}{2}\pi+\phi_\mu-\beta_i)\geq 0$，$K\geq\frac{2}{\pi}$ とする。

σ_1/σ_3 と S_z/S_x との間に成立する基本的関係は(11)式で与えられている。すなわち，$\beta_i=\beta_c$ の時，$\sigma_1/\sigma_3/S_z/S_x=G(\beta_c)$ であり，β_i が β_c 以外の $\phi_\mu\leq\beta_i\leq\frac{1}{2}\pi$ の範囲内にある時，$\sigma_1/\sigma_3/S_z/S_x<G(\beta_i)$ である。このことから主応力比と構造特性がある値に与えられた場合において，$\phi_\mu\leq\beta_i\leq\frac{1}{2}\pi$ の範囲内に N_i の方向を持つ接点ですべりを発生する確率は(15)あるいは(18)式で与えられ，$0\leq\beta_i<\phi_\mu$ ではどのような場合でも $P(\beta_i)=0$ となる。

(15)，(16)式の $P(\beta_i)$ を与える式を使い，粒状体の構造特性（S_z/S_x）と変形特性（$d\varepsilon_1, d\varepsilon_3$）との理論的関係式を導くことができる。このことに関しては次の機会に報告する。

参考文献

(1) Horne, M.R. (1965) "The Behaviour of an Assembly of Rotund and Rigid, Cohesionless Particles" Proc. Roy. Soci. A. Vol.286, P.62

(2) Murayama, S (1966) "A Theoretical Consideration on a Behaviour of Sand," Proc. IUTAM, Symp. Rheology Soil Mech, Grenoble, P.9

(3) 小田匡寛 (1970) "砂のような粒状体の構造に関する研究" 第5回土質工学研究発表会講演集，P.65

(4) ――― (1971) "砂のような粒状体の構造に関する研究（その2）" 第6回土質工学研究発表会講演集，P.81

(5) ――― (1971) "砂の変形にともなう構造変化に関する研究" 土木学会第26回年次学術講演会講演集，P.45

(6) ―――，小林広充，山崎富衛 (1972) "砂の微視的な変形機構について" 第7回土質工学研究発表会講演集，P.161

(7) Oda, M (1972a) "Initial Fabrics and Their Relations to Mechanical Properties of Sands" Soils and Foundations, Vol.12, No.4

(8) ――― (1972b) "The Mechanism of Fabric Change during Compressional Deformation of Sand" Soils and Foundations, Vol.13, No.1, P.1

(9) ――― (1972c) "Deformation mechanism of Granular Materials in Compression," Soils and Foundations (in print)

(10) Rowe, P.W (1962) "The Stress-Dilatancy Relation for Static Equilibrium of an Assembly of Particles in Contact" Proc. Roy. Soc. A, Vol.269, P.500