III-14　有限地盤の帯状基礎による圧密

広島大学工学部　正　○吉国　洋
〃　　〃　　中ノ堂裕文

1. まえがき

三次元圧密の問題は Terzaghi-Rendulic 系列の圧密論によっては解決しえないものであることを示した（吉国 1972）[1]。そこで、今一つの三次元圧密論である Biot の圧密論にその解決を期待するわけである。しかし、Biot の圧密論に変位関数を導入して解くことは正統な手法であるという印象を与えるけれども、実際問題の解を与えようとするとあまり簡単ではないようである。長い間多くの人が Biot 理論に解を与えようとしたとき、任意な境界条件および任意な変形定数を採用しえず、例えば地盤は半無限でポアソン比は零という特殊な応力ひずみ関係を持った土に対する解であることが Biot 理論の解を求めることの困難さを象徴しているように考えられる。この困難さも 1970 年に発表された Gibson らの有限地盤の帯基礎による圧密に関する論文[2]によって解決されたかにみえたが、山口先生ら（1972）[3]は、Gibson らの解もその解析の過程にかなり基本的問題点を含んでおり、またその解に妥当性が認められないことを指摘されており、自らも Biot 理論に帯基礎に対する解を与えられている。しかし、境界条件として自由変位表面でせん断応力が零という条件のかわりに水平変位がないという条件を持ちこまざるを得なかったと述べておられる。このように三次元圧密における境界値問題は Terzaghi 理論からでは想像しえないほど困難なもののようである。

そこで、本研究は、弾性論の援用をうけ、間隙水圧に注目して三次元圧密の問題を考えようとするもので境界値問題も全く自由ではないが、ある程度実際問題に有用な解を得る手法になり得ると考えている。

2. 理論的考察

飽和した粘土地盤における釣合方程式は、

$$(\lambda+2\mu)\,\mathrm{grad}\,e-\mu\,\mathrm{rot}\,\omega+\mathrm{grad}\,u=0 \tag{1}$$

であり、（1）式の発散と回転を考えるなら

$$\nabla^2\varphi=0 \tag{2}$$

$$\nabla^2\omega=0 \tag{3}$$

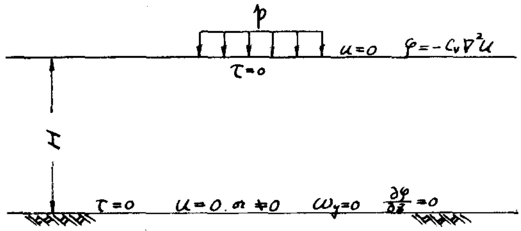
ただし、$\varphi=(\lambda+2\mu)e+u$ である。一方ある境界条件のもとにおける（2）式の解と連続の条件式を結合すれば圧密方程式が得られ

$$\dot{u}=C_v\nabla^2u+\dot{\varphi} \tag{4}$$

である。そこで（2）式の解を求める過程で φ という形で境界条件を与え得ないので（3）式の援用を得て（2）式を解こうとしている。しかし、それも一般的には解き得ないので境界条件を緩めて、次の二つの境界条件を設定しなければならない。

(1) 界面はすべて滑らかである。

(2) 少くとも自由変位界面は排水面である。



才1図

境界条件(1)を与えると剛な界面に沿った回転はつねに零である。才1図に示す帯基礎の問題では

$z=H,\quad x=x,\quad t=t$ において

$$\omega_y=0,\quad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=0$$

$$(\because\ equi\ \varphi \perp equi\ \omega)$$

であり，$z=0$ の自由変位界面における φ の値が判明すれば(2)式は混合境界値問題として解くことができる。そこで、境界条件(2)を考えると，(4)式は

$$\dot{\varphi}(x,0,t) = -C_v(\nabla^2u)_{x,0,t} \tag{5}$$

$$(\because\ \dot{u}(x,0,t)\equiv0)$$

となり，自由変位界面における φ の値は

$$\varphi(x,0,t) = \int_0^t \dot{\varphi}(x,0,\tau)\,d\tau + \varphi(x,0,0) \tag{6}$$

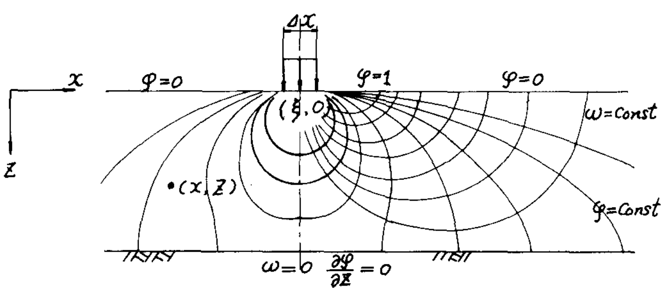
として求めることができる。今，自由変位界面の1点 $x=\xi$ に単位のスカラーポテンシャル φ が与えられた時の解を $f(x,z,\xi)$ とすると，任意点の $\varphi(x,z,t)$ は，

$$\varphi(x,z,t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\xi,0,t)\,f(x,z,\xi)\,d\xi \tag{7}$$

で与えられる。この関係を(4)式に代入し，差分法により近似解を求めることになる。しかし，差分法による数値計算上のテクニックのために(7)式中の素解 $f(x,z,\xi)$ は一点に集中して与えられた単位のスカラーポテンシャルに対するよりも才2図に示すように微少な巾に一様な単位のスカラーポテンシャルが与えられた場合の解として求めておく方が便利である。あとは(7)式に準じ，素解の重ね合せとして $\varphi(x,z,t)$ を求めることになる。

初期値

弾性学の教えるところにより，全応力 σ_x, σ_z を求め（参考文献4）、Hooke 則を考えると



才2図

$$\sigma_x = \sigma_x' + u = (\lambda+2\mu)e - 2\mu\,\varepsilon_z + u \tag{8}$$

$$\sigma_z = \sigma_z' + u = (\lambda+2\mu)e - 2\mu\,\varepsilon_x + u \tag{9}$$

であり，上の二式を加え合せ，$\varphi=(\lambda+3\mu)e+u$ を考えると

$$\sigma_x + \sigma_z = 2\varphi - 2\mu e$$

$$\therefore\quad \varphi = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z) + \mu e \tag{10}$$

今，$t=0$ において $e=0$ であるから $\varphi=u$ であり

$$\varphi(x,z,0) = u(x,z,0) = \frac{1}{2}(\sigma_x+\sigma_z) \tag{11}$$

として初期値を求めることができた。この初期値を求める方法については，すでに赤井先生が，参考文献4．において採用されている。

表面の沈下

以上で圧密過程の計算に必要なものは準備できたわけであるが，工学的に必要な量である自由境界面の沈下は，次のようにして計算することができる。今の場合，界面は滑らかであるので，

$$z=0 \text{ で } \tau=0 \qquad \gamma = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$

$$\therefore\quad \frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x} \tag{12}$$

であり，回転の y 方向の成分 ω_y は

$$\omega_y = \frac{\partial u_x}{\partial z} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

であるから，(12)式の関係を考慮して

$$\omega_y(x,0,t) = -2\frac{\partial}{\partial x}u_z(x,0,t)$$

である。したがって自由表面の沈下量は，

$$u_z(x,0,t) = \frac{1}{2}\int_{\infty}^{x}\omega_y(\xi,0,t)\,d\xi + C \tag{13}$$

として求められる。ただし，積分定数 C は，今の場合 $x\to\infty$ の時 $u_z=0$ となるので $C=0$ である。

また，$\omega_y(x,0,t)$ は，釣合方程式(1)式の z 方向の成分

$$\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,0,t) = \mu\frac{\partial}{\partial x}\omega_y(x,0,t)$$

$$\therefore\quad \omega_y(x,0,t) = \frac{1}{\mu}\int\frac{\partial}{\partial z}\varphi(x,0,t)\,dx \tag{14}$$

として求めることができる。なお圧密される地盤が x 方向に有限の場合には，(13)式の積分定数 C をすぐに決定しえないので次の関係を考慮して決定する。すなわち

$$\int_V e\,dV = -\int_V \mathrm{div}\,u\,dV = -\int_S u_n\,dS$$

であり、今の場合 $z=0$ の界面だけが自由に変位するとすれば

$$\int_V e\, dV = -\int_{x_1}^{x_2} u_z(x,0,t)\,dx$$

である。ここに x_1, x_2 は x 方向の境界面である。

以上の考え方は、先述の二つの境界条件を満すかぎり二次元の問題だけでなく三次元の問題にも拡張して適用することができるし、剛な界面の排水条件は任意に（局部的でもよい）設定することができる。

3、帯基礎の圧密と熱伝導型の方程式

帯基礎の圧密においては基本的には熱伝導型の圧密方程式は成立しないのであるが、近似として熱伝導型の圧密方程式が採用された場合[4]どのような物理的仮定がなされたかを考えてみよう。熱伝導型の方程式

$$\dot{u} = c_v \nabla^2 u \qquad (16)$$

は(4)式の右辺第二項を零とすれば得られ、すなわち $\dot{\varphi}=0$ である。粘土地盤内の全ての点で $\dot{\varphi}=0$ であるためには(2)式と(3)式に対する前述の議論から $z=0$ の自由変位界面で $\dot{\varphi}=0$ であればよい。そこでスカラーポテンシャル φ は(9)式の関係から

$$\varphi = \sigma_z + 2\mu\varepsilon_x$$

であり、$z=0$ において $\sigma_z = p$ or 0 であり、$\dot{p}=0$ とすれば

$$\dot{\varphi}(x,0,t) = 2\mu\dot{\varepsilon}_x(x,0,t) \qquad (17)$$

となる。すなわち熱伝導型の圧密方程式が成立するためには $\dot{\varepsilon}_x(x,0,t)=0$ でなければならない。これは載荷直後いくらかの側方変位があっても圧密過程中 $z=0$ の界面で $\tau=0$ であるにもかかわらずその後、側方変位が発生しないという仮定を含んでいることになる。一般的には $\dot{\varepsilon}_x(x,0,t)\neq 0$ であり圧縮を正に考えているので載荷直後、側方に変位したものが圧密過程中回復($\dot{\varepsilon}_x>0$)すると予想すれば $\dot{\varphi}>0$ であり局部的に間隙水圧は圧密過程中局部的に単調減少ではなく、いったん増加して減少する部分があると考えられる。熱伝導型の方程式(16)式で近似すれば、すべての点で間隙水圧は単調減少をすることになる。

4. あとがき

圧密の問題において釣合方程式(1)式をスカラーポテンシャル φ とベクトルポテンシャル ω に分割し、(2)、(3)式の Laplace の方程式を解く手法は境界値が φ, ω という形で与えられないためオーソドックスな手法ではないが、滑らかな面で境界がある形に拘束される場合には(3)式の境界条件が与えられるので、(2)式と(3)式の関連性から(2)式を解き得るので、いわゆる拘束圧密の問題を解くには Biot の圧密方程式を直接解くより容易なのではないかと考えている。

参考文献

1) 吉国洋：Terzaghi系列の圧密論の問題点　第7回土質工学会研究発表会概要（1972）
2) Gibson他：Plane Strain and Axially Symmetric Consolidation of a Clay on a Smooth Impervious Base，(1970) Q.J.M. & A.M.
3) 山口,村上：有限粘土層の多次元圧密について　第7回土質工学研究発表会概要（1972）
4) 赤井：堤体2次元圧密の研究　土木学会論文報告集，第16号，昭和28年4月