

奈良 正 眞 〇 原 一 良
名古屋大学 正 眞 川 本 龍 万

1. はじめに

弾性材料中の浸透流,あるいは,圧密の問題は,古くから研究されており, M. Biot はいわゆる Biot の問題として,飽和弾性土の圧密沈下の解析を行なっている。しかし,複雑な形状や任意の境界条件に対してはすっきりした形の沈下解析が行なわれなかったが, Sandhu ら¹⁾(1969)が Biot の問題に有限要素法を適用するようになったから,いくつかの研究が発表されている。Sandhu らは,飽和弾性土を対象にして,力のつり合方程式とダルシー則を飽和率付式で結びつけ,弾性土中の浸透流に対する汎関数を導き,それを有限要素に対して定式化し,帯状貯室をうける半無限地盤(平面ひずみ状態)の沈下解析を行なっている。また,別に,横尾ら(1971)も弾性土に対して同様の汎関数を導いている。Terzaghi の圧密理論によれば,粘土中の過剰間けき水圧が消散して沈下がある一定値に収束するはずであるが,実際にはほとんどすべて粘土がその後と沈下を継続する,いわゆる二次圧密現象を示す。この現象を力学モデルを用いて解析的に表現しようとする研究は, Taylor と Merchant によって始められた。ここでは, Voigt 物体を考へ,弾性体に対する解法を適用して,粘弾性体中の浸透流に対する汎関数を導き,二,三の解析例を示す。

2. 基礎方程式と汎関数

Biot の問題では粘土の骨組構造を弾性体(図-1a)と仮定しているが,ここでは,その変形抵抗自体が,図-1b に示すように, Voigt 体であると仮定する。その場合には,間けき水の動水抵抗がなくなった後も,時間遅れが生じて沈下を続けることになる。土と水の混合物に対する力のつり合方程式は,間けき水圧を $\bar{u}$ とすると,

$$(\sigma_{ij} + \delta_{ij} \bar{u})_{,j} + F_i = 0 \quad (1)$$

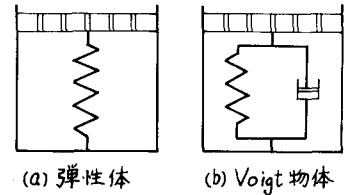


図-1

ここで, σ_{ij} は有効応力, F_i は物体力, δ_{ij} はクロネッカーのデルタである。そして有効応力 σ_{ij} とひずみ ε_{kl} との間には,次の関係が与えられる。

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} + \eta_{ijkl} \cdot \dot{\varepsilon}_{kl} \quad (2)$$

ただし, η_{ijkl} は粘性係数であり, 各ひずみ成分に対して一定であると仮定すれば, $\eta_{ijkl} = \eta$ とかける。また, 間けき水圧 $\bar{u}$ は, ポテンシャル水頭 h 2次のように与えられる。

$$\bar{u} = -\gamma_w h \quad (3)$$

ここに, γ_w は水の単位体積重量である。浸透流に対してダルシーの法則が成り立つものとし, 流速を v_i , 透水係数を k_{ij} とすると,

$$v_i = -k_{ij} h_{,j} \quad (4)$$

飽和土については、体積収縮速度 $\dot{\epsilon}_{ii}$ は流量に等しいので、次式が成り立つ。

$$\dot{\epsilon}_{ii} = -v_{i,i} \quad (5)$$

初期状態において、体積収縮を生じていないとすると、(4)式と(5)式より体積収縮は次のように、convolution product ($*$ 印で表示)を用いて表わされる。

$$\epsilon_{ii} = (k_{ij} * h_{,j})_{,i} \quad (6)$$

外部境界としては、ポテンシャル水頭 h に対して固定条件をもつ境界 S_h と、流出量が規定された境界 S_Q とが考えられる。また、変位 u_i については、固定条件をもつ境界 S_u と境界荷重が規定された境界 S_T が考えられる。各境界での境界条件は次のように表わされる。

$$S_h \text{ において, } h = h_0 \quad (7), \quad S_Q \text{ において, } Q = -n_i k_{ij} h_{,j} \quad (8)$$

$$S_u \text{ において, } u_i = u_{0i} \quad (9), \quad S_T \text{ において, } T_i = n_i (\sigma_{ij} - \gamma_w h \delta_{ij}) \quad (10)$$

また、要素 n と要素 $(n+1)$ との内部境界 S_i 上では、水頭 h 、変位 u_i の連続性より、流出量の連続条件と応力の連続条件が得られる。

次の一連の方程式、流れの連続条件式および飽和土に関する条件式と満足し、かつ、境界条件と考慮した汎関数は、弾性体中の浸透流の場合と同様に次式で与えられる。

$$\begin{aligned} \Pi = & \iiint_V \left(\frac{1}{2} \gamma_w k_{ij} * h_{,i} * h_{,j} + \gamma_w h * \epsilon_{ii} - \frac{1}{2} \sigma_{ij} * \epsilon_{ij} + F_i * u_i \right) dV \\ & + \iint_{S_Q} \gamma_w * Q * h dS + \iint_{S_T} T_i * u_i dS \end{aligned} \quad (11)$$

3. 有限要素に対する定式化

要素内の未知量ベクトル $\{\alpha\}^T = [u_{1,i} \ u_{2,i} \ \dots \ u_{n,i} \ h_i \ \dots \ u_{n,m} \ \dots \ u_{n,m} \ h_m]$ により、変位ベクトル $\{u_i\}$ 、同様の水圧水頭 h は次のように規定される。

$$\{u_i\} = [A(x)] \{\alpha(t)\}^e \quad (12), \quad h = \{B(x)\}^T \{\alpha(t)\}^e \quad (13)$$

ここで、 $[A(x)]$ 、 $\{B(x)\}$ は要素内で与えられる形状関数である。また、収縮成分は(12)式より、

$$\{\epsilon_i\} = [C(x)] \{\alpha(t)\}^e, \quad \epsilon_{ii} = \{D(x)\}^T \{\alpha(t)\}^e \quad (14)$$

(2)式に(12)式を用いて、マトリックス表示すると、応力-ひずみ関係は次のように書きなおされる。

$$\{\sigma_i\} = [E_{ij}][C] \{\alpha\} + \gamma [C] \{\alpha\} \quad (15)$$

(12)~(15)式と(11)式に用いた汎関数と計算すると、

$$\hat{\Pi} = \frac{1}{2} \{\alpha\}^T * [N] * \{\alpha\}^e + \{\alpha\}^T * [M] * \{\alpha\}^e - \frac{1}{2} \{\alpha\}^T * [L] * \{\alpha\}^e - \frac{1}{2} \{\alpha\}^T * [O] * \{\alpha\}^e + \{\alpha\}^T * \{P\} \quad (16)$$

$$\left. \begin{aligned} \text{上式中, } [L] &= \iiint_{V_n} [C]^T [E_{ij}] [C] dV, & [M] &= \iiint_{V_n} \gamma_w \{B\} \{D\}^T dV \\ [N] &= \iiint_{V_n} \gamma_w [G]^T [k_{ij}] [G] dV, & [O] &= \iiint_{V_n} \gamma [C]^T [C] dV \\ \{P\} &= \iint_{S_Q} \gamma_w \{B\} * Q dS + \iint_{S_T} [A]^T T_i dS + \iiint_{V_n} [A]^T F_i dV \end{aligned} \right\} \quad (17)$$

上式の $[G]$ マトリックスは水頭勾配 $\{h_{,i}\}$ を規定するものであって、 $\{B\}$ から計算される。

$\{\alpha\}^e$ を未知量ベクトル $\{\alpha_1\}^e$ と既知量ベクトル $\{\alpha_2\}^e$ に分け、 $\{\alpha_1\}^e$ による汎関数 (15) 式の一次変分を計算する。

$$\begin{aligned} \delta \hat{\Pi} &= (\{\delta \alpha_1\}^e)^T * \left[(-[L_{11} \ L_{12}] + [M_{11} \ M_{12}] + \begin{bmatrix} M_{11} \\ M_{21} \end{bmatrix})^T \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}^e + [N_{11} \ N_{12}] * \begin{Bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{Bmatrix}^e \right. \\ &\quad \left. - [O_{11} \ O_{12}] \begin{Bmatrix} \dot{\alpha}_1 \\ \dot{\alpha}_2 \end{Bmatrix}^e + \{P_i\} \right] \\ &= (\{\delta \alpha_1\}^e)^T * \left([Q] \{\alpha_1\}^e + [N_{11}] * \{\alpha_1\}^e - [O_{11}] \{\dot{\alpha}_1\}^e + \{\hat{R}\} \right) \end{aligned} \quad (18)$$

$$\therefore \text{ここで,} \quad \{\hat{R}\} = \{R\} - [O_{12}] \{\dot{\alpha}_2\} \quad (19)$$

汎関数の一次変分を零とおくと, (18) 式より次式が得られる。

$$[Q] \{\alpha_1\}^e + [N_{11}] * \{\alpha_1\}^e - [O_{11}] \{\dot{\alpha}_1\}^e + \{\hat{R}\} = 0 \quad (20)$$

上式を時間について微分し, 全要素について重ね合わせ, 時間 $t + \frac{\Delta t}{2}$ について表示すると,

$$[Q] \{\alpha_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} + [N_{11}] \{\alpha_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} - [O_{11}] \{\dot{\alpha}_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} + \{\hat{R}\} = 0 \quad (21)$$

$\therefore$ したがって, 次のように仮定する。

$$\{\alpha_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} = \frac{1}{2} (\{\alpha_1(t + \Delta t)\} + \{\alpha_1(t)\}), \quad \{\dot{\alpha}_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} = \frac{1}{\Delta t} (\{\alpha_1(t + \Delta t)\} - \{\alpha_1(t)\})$$

$$\{\ddot{\alpha}_1(t + \frac{\Delta t}{2})\} \div \{\ddot{\alpha}_1(t)\} = \frac{1}{(\Delta t)^2} (\{\alpha_1(t + \Delta t)\} - 2\{\alpha_1(t)\} + \{\alpha_1(t - \Delta t)\})$$

上の関係を用いると, (21) 式は次のように表わされる。

$$\begin{aligned} &([Q] + \frac{\Delta t}{2} [N_{11}] - \frac{1}{\Delta t} [O_{11}]) \{\alpha_1(t + \Delta t)\} \\ &= ([Q] - \frac{\Delta t}{2} [N_{11}] - \frac{2}{\Delta t} [O_{11}]) \{\alpha_1(t)\} - \{\dot{R}(t + \frac{\Delta t}{2})\} + \frac{1}{\Delta t} [O_{11}] \{\alpha_1(t - \Delta t)\} \end{aligned} \quad (22)$$

上式より, $\{\alpha_1(t)\}$, $\{\alpha_1(t - \Delta t)\}$ を与えれば, $\{\alpha_1(t + \Delta t)\}$ の分布が求められる。

4. 解析例

軸対称解析の例として, 半径 0.5 m, 長さ 14.0 m のセントパイルと半径 5.0 m の影響円をもつように地盤中に打ち込んだ場合を考え, 図-2 に示すように, 40 節点によって 56 要素に分割し, 地表面の沈下形状に拘束を与えない, いわゆる自由な沈み状態について, 次の条件のもとで解析した。

初期条件 ($t = 0$): $u = u_0 = 5.0 \text{ t/m}^2$

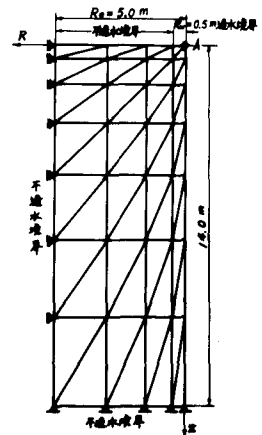
境界条件 ($t > 0$): $r \leq r_w = 0.5 \text{ m}$, $z = 0 \text{ m}$ 時, $\bar{u} = 0$,
 $r = r_e$ 時, $\partial \bar{u} / \partial r = 0$,

砂柱の透水係数: $k_r = k_z = 1.0 \times 10^{-5} \text{ m/sec}$,

地盤の力学特性: (i) 弾性体 $E = 200 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0.3$

(ii) 粘弾性体 $E = 200 \text{ t/m}^2$, $\nu = 0.3$

$\eta = 2.0 \times 10^{-6}$ および $\eta = 2.0 \times 10^{-5} \text{ sec} \cdot \text{m}^2/\text{t}$



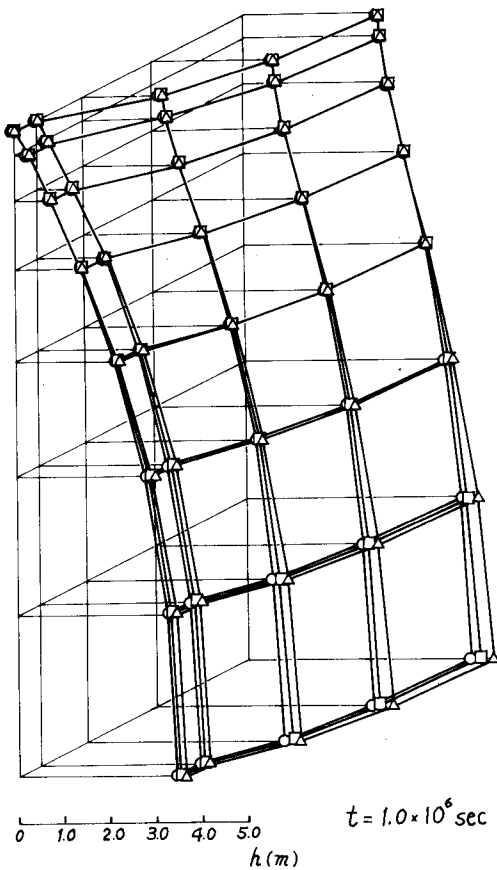
数値解析が完了した (詳しい数値解析については当日に必ず)

図-2

るが、同じ水圧の $t = 1.0 \times 10^6 \text{ sec}$ と $t = 4.0 \times 10^6 \text{ sec}$ における分布を示すと、図-3 と 図-4 のようである。粘弾性体 (Voigt モデル) の場合には、同じ水圧は弾性体の場合より遅れと減少するといわれる。

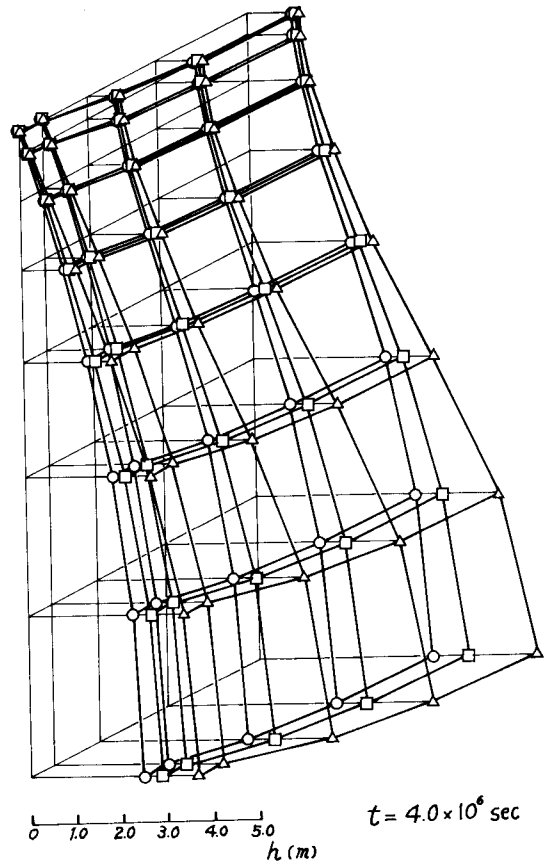
参考文献

- 1) Sandhu, R.S. and Wilson, E.L. : J. Eng. Mech. Div., ASCE. 95, (1969), pp. 641-652.
- 2) Yokoo, Y., Yamagata, K., and Nagaoaka, H. : Soils and Foundations, (1971), 11, pp. 25-36 and pp. 37-53.



○ 弾性解, $\square \eta = 2.0 \times 10^4 \text{ sec} \cdot \text{m}^2 / \text{ton}$
 $\triangle \eta = 2.0 \times 10^5 \text{ sec} \cdot \text{m}^2 / \text{ton}$

図-3 同じ水圧分布



○ 弾性解, $\square \eta = 2.0 \times 10^4 \text{ sec} \cdot \text{m}^2 / \text{ton}$
 $\triangle \eta = 2.0 \times 10^5 \text{ sec} \cdot \text{m}^2 / \text{ton}$

図-4 同じ水圧分布