III-2　　有限要素法による非ダルシー流れの簡易解析法

徳島大学工学部　正員　山上拓男

1. まえがき

多孔体中の浸透流は一般にダルシーの法則に従ういわゆる層流状態であることは周知の通りである。しかし、レイノルズ数がある限度より大きくなれば流れは乱流状態に移行し、動水勾配と流速との間に非線形関係の成立することもまた多くの研究者に指摘されている事実である。この非ダルシー流れの *energy loss equation* として著名かつ実用的なものに、Forchheimer 則および指数法則と称せられるものがある。Volker[1] はこの2つの法則を用いて、変分原理を媒介とした有限要素解析の一手法を確立しているが、その結果はいずれも非線形連立方程式を解かねばならず、かなり計算が繁雑となるきらいがある。そこで筆者は、線形計算の反復で非線形流れを解析する1つの方法を試みたので以下に報告する。これは連続体の非線形応力解析における荷重漸増法ならびに反復法に相当するものである。

2. 漸増法

Forchheimer 則：

$$I = av + bv^2 \quad \text{-----------------} \quad (1)$$

v：流速，I：動水勾配，a, b：定数

指数法則：

$$I = \alpha v^n \qquad (2)$$

v：流速，I：動水勾配，α, n：定数($1 \leqq n \leqq 2$)

式(1)，(2)を v で微分すると

$$\frac{dI}{dv} = a + 2bv \quad \text{-----------} \quad (3)$$

$$\frac{dI}{dv} = \alpha n v^{n-1} \quad \text{-----------} \quad (4)$$

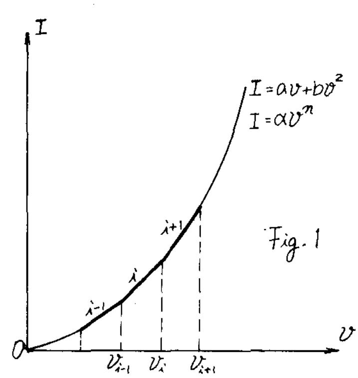

Fig.1

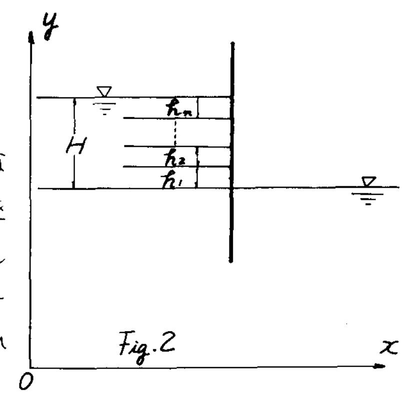

Fig.2

問題を confined seepage に限り、例えば Fig.2 に示すような矢板のまわりの流れを考えると、与えられた最終設計水頭差Hを適当な増分 $h_1, h_2, \cdots, h_n$ に分割する。この増分過程の累積として最終状態が得られるものとし、おのおのの増分内ではダルシーの法則がなり立つものと仮定する。例えば Forchheimer 則であれば、式(3) は Fig.1 の接線勾配を与えるが、この逆数すなわち $1/(a+2bv)$ をあたかも透水係数のようにみなし（疑似透水係数と呼ぶことにする），第 i 増分段階では，その一歩手前の $(i-1)$ 段階 $\underbrace{\text{の流速}}_{\text{終了時}}$ v_{i-1} を用いて、

$$k_i = \frac{1}{a + 2bv_{i-1}} \quad \text{-----------------------------} \quad (5)$$

この疑似透水係数を用いて、ダルシーの法則から

$$V_{xi} = -k_i \frac{\partial H_i}{\partial x}, \quad V_{yi} = -k_i \frac{\partial H_i}{\partial y} \qquad \text{(6)}$$

ここに、H_i：第 i 増分過程の水頭分布，　V_{xi}, V_{yi}：第 i 増分過程の座標方向速度成分，
またこの場合の流れを支配する基礎微分方程式は

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_i \frac{\partial H_i}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(k_i \frac{\partial H_i}{\partial y}\right) = 0 \qquad \text{(7)}$$

したがってこの式(7)に注目すれば、既往の有限要素解析のためのプログラム[2]がそのまま応用できる。

一方、指数法則に関しては、式(4)から

$$k_i = \frac{1}{\alpha \cdot n \cdot V_{i-1}^{n-1}} \qquad \text{(8)}$$

以下その取扱いは上と同様である。

3．反復法

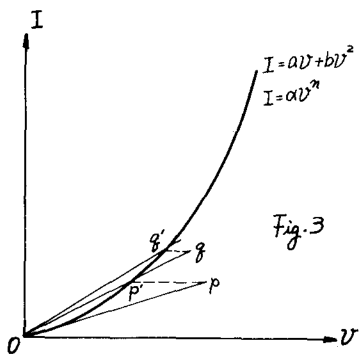

Fig.3

Fig.3 のように I − V 曲線の初期接線勾配から出発して、線形計算を繰返し、その都度疑似透水係数を修正して、各要素における (I, V) 点が許容される範囲内で全て energy loss equation を満すように反復計算を行うものである。

Forchheimer 流れを例にとると、初期接線勾配は、a，したがってこの場合の疑似透水係数 1/a を用いて、上下流側水頭差 H (Fig.2 参照) なる境界条件のもとに、第 1 回目の線形計算を行うと、その結果は、Fig.3 の p 点で表されるように、energy loss equation からかなり偏倚したところに落着くことが予想される。この場合、偏倚量 $\overline{pp'}$ があらかじめ規定された許容値より大であれば、引続き、原点と p' 点を結ぶ直線の勾配の逆数を疑似透水係数として、上と同様な線形計算を行う。こうして得られた結果の偏倚量 $\overline{qq'}$ が全ての要素に渡って、許容値内にあれば、解は収束したものとして計算を打切る。この反復法の場合も、もちろん線形計算であるから従来のプログラムがそのまま利用でき、極めて好都合である。なお指数法則の場合は、初期接線勾配が $\alpha \cdot n$，したがってこのときの疑似透水係数が $1/\alpha n$ となる以外は、その process は上と同様である。

4．緒言

以上簡単に非ダルシー流れの簡易解析法について述べたが、この方法が有効であるか否か、現在、Volker および、京大防災研、岡太郎先生の実験結果[3]を用いて検討中であるので当日発表の予定である。なお、ここで述べた方法によれば、どのような energy loss equation に対しても、解析過程への導入が容易であり、さらに、境界条件、地盤の非均質性に無関係に適用し得るものである。

［参考文献］

1) Volker, R.E. ; Non linear Flow in Porous Media by Finite Elements, Proc. of ASCE, HY, vol 95, No.6, 1969, pp.2093–2114.
2) 山上，小田；非均質異方性地盤中の流れに関する有限要素解析について，土と基礎，Vol 20, No.3, 1972, pp.7～13.
3) 岡太郎；Forchheimer 則を適用した Confined Seepage (2)，京大防災研年報第13号，昭和45年，pp.147～159.