III－1　有限要素法による三次元浸透流解析について

徳島大学工学部　正員　山上拓男
徳島大学工学部　学員　○宮田　哲

1．まえがき

近年，場の問題としての多孔体中の浸透流に対して，その有効性を発揮しつつある有限要素法による解析例が数多くみられる。これらの多くは二次元浸透流場としての仮定のもとに解析され，かなり精度のよい結果を得ている。しかし，複雑な形状を有する締切り堤内での工事および浸透圧の低下を図るための *deep well* 等による揚水を行なう場合には，二次元的取扱いでは満足できなくなる。そこで筆者らは，従来解析的に困難であった三次元浸透流問題に対して有限要素法を適用し，問題を *confined seepage* に限定して解析を試み，これに実験値を交えて満足すべき結果を得られるか否か比較検討しようとするものである。

2．三次元解析

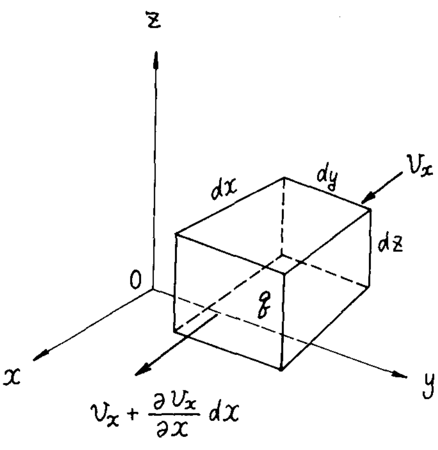
流れの場において，図－1に示すような微小な要素を考え，この要素内で単位時間，単位体積当りの水の消散を g とすると，連続の方程式は，

$$\frac{\partial v_x}{\partial x}+\frac{\partial v_y}{\partial y}+\frac{\partial v_z}{\partial z}+g=0 \qquad (1)$$

となる。ここで，浸透流速が小さく，要素内での流れがダルシーの法則に従うものとすると，

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(k_x\frac{\partial H}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(k_y\frac{\partial H}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(k_z\frac{\partial H}{\partial z}\right)-g=0 \qquad (2)$$

ここに，k_x, k_y, k_z はそれぞれ x, y, z 方向の透水係数であり，Hは全水頭である。



図－1

この式(2)に対する汎関数は次式となる。

$$\chi=\iiint\left[\frac{1}{2}\left\{k_x\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)^2+k_y\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right)^2+k_z\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right)^2\right\}+g\cdot H\right]dx\,dy\,dz \qquad (3)$$

定常浸透流場における支配微分方程式(2)を解くための境界条件は，解析領域Gの境界Γの一部，Γ_1上においては

$$k_x\frac{\partial H}{\partial x}l+k_y\frac{\partial H}{\partial y}m+k_z\frac{\partial H}{\partial z}n=0 \qquad (4)$$

ここに，l, m, n は境界Γ_1表面における法線の方向余弦である。また，残りの境界Γ_2上においては，Γ_2上にとった長さをSとして次式で与えられる。

$$H=H(S) \qquad (5)$$

変分原理によると，式(2)は汎関数(3)に対するオイラーの方程式であるから，式(4)および式(5)の境界条件のもとに式(2)を解くことは，汎関数(3)を境界条件(5)のもとに極値ならしめる水頭

Hの分布を求める問題と等価となる。

三次元浸透流場に有限要素法を適用するにあたり，解析領域を図－2に示すような四面体要素で分割し，各要素内で透水係数 k_x, k_y, k_z が一定であると仮定する。また，要素の頂点に付す節点番号は図－2に対して $ijmp$，$pjim$ のように最後の節点から見て他の3節点が反時計廻りとなるような順に数えるものとする。

要素内での水頭Hの分布は，各要素の境界においても連続性を満たすべく次のように仮定する。

$$H = A + Bx + Cy + Dz \tag{6}$$

ここで，上式に各節点の水頭値および座標値を代入すると四元一次連立方程式が得られる。これを解くと上式の係数 A, B, C, D が定まり，この係数を再び上式に代入すれば，要素内での水頭Hは次式となる。

$$H = [N_i, N_j, N_m, N_p]\begin{Bmatrix} H_i \\ H_j \\ H_m \\ H_p \end{Bmatrix} \tag{7}$$

ここに，　$N_i = \frac{1}{6V}(a_i + b_i x + c_i y + d_i z)$

N_j, N_m, N_p は回転順列

V は四面体要素の体積を表わし，他の係数は，

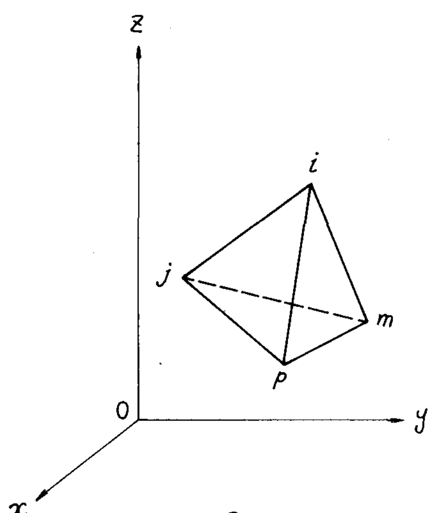
$$a_i = x_j(y_m z_p - y_p z_m) + x_m(y_p z_j - y_j z_p) + x_p(y_j z_m - y_m z_j)$$

$$b_i = y_j(z_p - z_m) + y_m(z_j - z_p) + y_p(z_m - z_j)$$

$$c_i = x_j(z_m - z_p) + x_m(z_p - z_j) + x_p(z_j - z_m)$$

$$d_i = x_j(y_p - y_m) + x_m(y_j - y_p) + x_p(y_m - y_j)$$

残りは i, j, m, p の順に循環して得られる。



図－2

このような水頭Hに対して，汎関数(3)を極小にするHを求めるためには，式(3)を各節点における水頭 H_r ($r = 1 \sim N$(節点数))により微分し，$\frac{\partial \chi}{\partial H_r} = 0$ とおいて得られる連立方程式を解けばよい。

いま，要素eのみの $\frac{\partial \chi}{\partial H_i}$ への寄与は，式(3)において積分範囲を要素eの体積のみに限るものとすればよく，それを $\frac{\partial \chi^e}{\partial H_i}$ で表わすと次のようになる。

$$\frac{\partial \chi^e}{\partial H_i} = \iiint \left\{ k_x \frac{\partial H}{\partial x}\frac{\partial}{\partial H_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right) + k_y \frac{\partial H}{\partial y}\frac{\partial}{\partial H_i}\left(\frac{\partial H}{\partial y}\right) + k_z \frac{\partial H}{\partial z}\frac{\partial}{\partial H_i}\left(\frac{\partial H}{\partial z}\right) + q\frac{\partial H}{\partial H_i} \right\} dx\,dy\,dz \tag{8}$$

ただし，q は要素内において一定とする。さらに上式の $\frac{\partial H}{\partial x}$，$\frac{\partial}{\partial H_i}\left(\frac{\partial H}{\partial x}\right)$，$\frac{\partial H}{\partial H_i}$ 等を展開し式(8)へ代入すると，

$$\begin{aligned} \frac{\partial \chi^e}{\partial H_i} = \frac{1}{36V^2}\iiint \{ & k_x b_i(b_i H_i + b_j H_j + b_m H_m + b_p H_p) \\ & + k_y c_i(c_i H_i + c_j H_j + c_m H_m + c_p H_p) \\ & + k_z d_i(d_i H_i + d_j H_j + d_m H_m + d_p H_p)\} dx\,dy\,dz \\ & + \frac{q}{6V}\iiint (a_i + b_i x + c_i y + d_i z)\, dx\,dy\,dz \end{aligned} \tag{9}$$

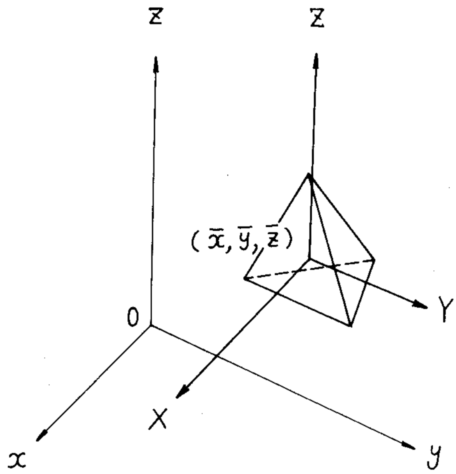
上式は右辺オ一項の被積分関数が x, y, z に無関係であるから右辺オ2項に注目する。ここで図－3

に示すように，座標系(x, y, z)を平行移動し，要素の重心に原点を置く新座標系(X, Y, Z)を考えると，両座標間には次の関係がある。

$$x=\bar{x}+X,\quad y=\bar{y}+Y,\quad z=\bar{z}+Z$$

これより，

$$\iiint x\,dx\,dy\,dz=\iiint \bar{x}\,dx\,dy\,dz+\iiint X\,dX\,dY\,dZ$$



図－3

積分公式より右辺オ２項は消え，

$$\iiint x\,dx\,dy\,dz=\bar{x}\cdot V$$

ここに，

$$\bar{x}=\frac{x_i+x_j+x_m+x_p}{4},\quad \bar{y}=\frac{y_i+y_j+y_m+y_p}{4}$$
$$\bar{z}=\frac{z_i+z_j+z_m+z_p}{4}$$

以上のことから式(9)の右辺オ２項は$\dfrac{gV}{4}$となる。
したがって式(9)は次のようになる。

$$\frac{\partial\chi^e}{\partial H_i}=\frac{1}{36V}\Big\{k_x b_i(b_iH_i+b_jH_j+b_mH_m+b_pH_p)+k_y c_i(c_iH_i+c_jH_j+c_mH_m+c_pH_p)+k_z d_i(d_iH_i+d_jH_j+d_mH_m+d_pH_p)\Big\}+\frac{gV}{4} \tag{10}$$

well からの揚水量を単位時間当りQとし，このwellの吸込口の属する要素の体積をVとして，揚水量$Q=gV$と仮定すると，上式の右辺オ２項は$\dfrac{Q}{4}$となる。この場合，当然吸込口を含む要素はできる限り小さく取るべきである。以下同様の手順で要素eの$\dfrac{\partial\chi}{\partial H_j}$，$\dfrac{\partial\chi}{\partial H_m}$，$\dfrac{\partial\chi}{\partial H_p}$への寄与が得られる。

これらの関係を行列表示すると，

$$\left\{\frac{\partial\chi^e}{\partial H}\right\}=[h]^e\{H\}^e+\{F\}^e \tag{11}$$

ここに，$[h]^e$は要素eに対する浸透性行列であり，

$$[h]^e=\frac{k_x}{36V}\begin{bmatrix} b_ib_i & b_jb_i & b_mb_i & b_pb_i \\ & b_jb_j & b_mb_j & b_pb_j \\ & & b_mb_m & b_pb_m \\ \text{symmetrical} & & & b_pb_p \end{bmatrix}+\frac{k_y}{36V}\begin{bmatrix} c_ic_i & c_jc_i & c_mc_i & c_pc_i \\ & c_jc_j & c_mc_j & c_pc_i \\ & & c_mc_m & c_pc_m \\ \text{symmetrical} & & & c_pc_p \end{bmatrix}$$
$$+\frac{k_z}{36V}\begin{bmatrix} d_id_i & d_jd_i & d_md_i & d_pd_i \\ & d_jd_j & d_md_j & d_pd_j \\ & & d_md_m & d_pd_m \\ \text{symmetrical} & & & d_pd_p \end{bmatrix}$$

また，

$$\left\{\frac{\partial\chi^e}{\partial H}\right\} = \left\{\begin{matrix}\frac{\partial\chi^e}{\partial H_i}\\ \frac{\partial\chi^e}{\partial H_j}\\ \frac{\partial\chi^e}{\partial H_m}\\ \frac{\partial\chi^e}{\partial H_p}\end{matrix}\right\} \qquad \{H\}^e = \left\{\begin{matrix}H_i\\ H_j\\ H_m\\ H_p\end{matrix}\right\} \qquad \{F\}^e = \left\{\begin{matrix}\frac{Q}{4}\\ \frac{Q}{4}\\ \frac{Q}{4}\\ \frac{Q}{4}\end{matrix}\right\}$$

この各要素の浸透性行列を全要素に渡って重ね合せると，最終的に次のような連立方程式が求められる。

$$[h]\left\{\begin{matrix}H_1\\ H_2\\ H_3\\ \vdots\\ \vdots\\ H_N\end{matrix}\right\} = \left\{\begin{matrix}\Sigma - \frac{Q}{4}\\ \Sigma - \frac{Q}{4}\\ \Sigma - \frac{Q}{4}\\ \vdots\\ \vdots\\ \Sigma - \frac{Q}{4}\end{matrix}\right\} \qquad (12)$$

ここに，$[h]$は系全体の浸透性行列である。

また右辺のΣは，その節点に会合する要素のうち，*well* の吸込口を有する要素に渡っての合計を意味する。

3．結言

本研究においては，複雑な境界を有する浸透流に対してダルシー則の適用範囲内で三次元解析を試みた。これに従って，目下，模型 *well* を有する室内実験および京都大学大型計算機センターを対象としたプログラムを開発中であり，結果は当日発表の予定である。

参考文献

Zienkiewiz, O.C. and Y.K. Cheung ; The Finite Element Method in Structural and Continuum Mechanics, McGraw-Hill Book Co., 1967, pp.148~159, pp. 74~77, pp. 260（吉識雅夫監訳，マトリックス有限要素法，培風館，1970，pp.162~173, pp. 82~85, pp. 296）