

1. まえがき

本報は流れのレイノルズ数と抵抗係数との関係が Darcy の法則からよんでいる非 Darcy 流れの機構を知るために、浸透領域を二次元円柱が規則正しく配置されているものと仮定し、Navier-Stokes の方程式を直接数値計算したものである。従来より浸透層内の流れのパターンの中には、D.E.Wright 等⁽¹⁾の実験にみられるように砂粒の曲率の影響を受けて定常的な渦領域が発生する定常慣性領域があると言われている。本報ではこの定常慣性領域の流れの機構を解明しようとした。

2. 領域の分割と基礎式の差分化

流れの領域は図-1 に示すように、円柱が規則正しく配置されていてその一部を単位の系としてとり出した。それぞれ円柱に対して円柱座標を与える。このような座標の与えておけば、円柱表面での変化の大きい渦度に対して一様に近似計算ができ、精度も全体を直交座標で組んで円柱表面を近似するよりも良い。それぞれ円柱に境界条件を与えるには、図-2 に示すように領域を二つに分し、円柱(1)については円柱(2)の1ステップ前の値も境界値とし、円柱(2)については、円柱(1)で計算したばかりの値を境界値として以下計算を繰り返す。例えば、図-2 中の円柱(1)座標上の A 点、あるいは円柱(2)座標上の B 点は、円柱(2)座標の境界値、円柱(1)座標の境界値を用いて算術平均しよとその値とする。つぎに、Navier-Stokes の方程式の円柱座標表示は、

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 u - \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{u}{r^2} \right) - \left(u \frac{\partial u}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v^2}{r} \right) \quad (1)$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = \frac{1}{Re} \left(\nabla^2 v + \frac{2}{r^2} \frac{\partial u}{\partial \theta} - \frac{v}{r^2} \right) - \left(u \frac{\partial v}{\partial r} + \frac{v}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{uv}{r} \right) \quad (2)$$

ここに、 $Re = \delta q / \nu$ 、 δ : 砂粒径、 q : 流速、 ν : 動粘性係数、 $\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}$

(1)式、(2)式を流れ関数 ψ 、渦度 ζ で渦方程式に書きなおすと、

$$Re \nabla^2 \zeta = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial \zeta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} \frac{\partial \psi}{\partial r} \quad (3), \quad \zeta = \nabla^2 \psi \quad (4)$$

いま、半径方向の格子間隔を R 、 θ 方向の格子間隔を r とし、(3)、(4)式を差分化すれば、

$$\zeta^* = - \frac{Re R}{8 r R (1 + R^2/r^2)} \left\{ \left(\psi_3^{(v)} - \psi_1^{(v)} \right) \left(\zeta_2^{(v)} - \zeta_4^{(v)} \right) - \left(\psi_2^{(v)} - \psi_4^{(v)} \right) \left(\zeta_3^{(v)} - \zeta_1^{(v)} \right) \right\} + \frac{1}{2(1 + R^2/r^2)} \left\{ \frac{R^2}{r^2} \zeta_1^{(v)} + \left(1 + \frac{R}{2r} \right) \zeta_2^{(v)} + \frac{R^2}{r^2} \zeta_3^{(v)} + \left(1 - \frac{R}{2r} \right) \zeta_4^{(v)} \right\} \quad (5)$$

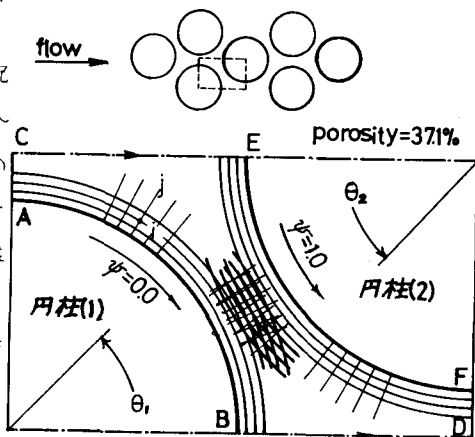
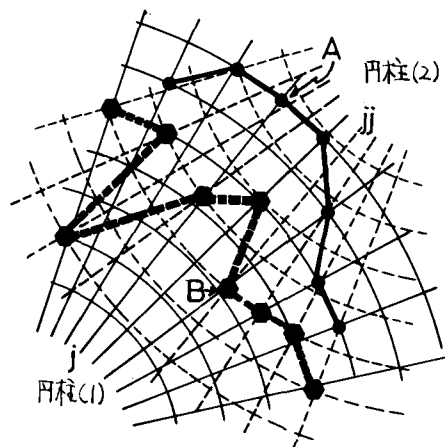


図-1



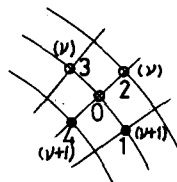
重ね合わせ

図-2

$$\zeta_0^{(H)} = \zeta_0^{(V)} + \beta \left(\zeta_0^{(H)*} - \zeta_0^{(V)} \right) \quad \text{--- (6)}$$

$$\zeta_0^{(H)*} = \frac{1}{2(1+k^2/r_0^2)} \left\{ \frac{k^2}{r_0^2} \zeta_1^{(H)} + \left(1 + \frac{k}{2r}\right) \zeta_2^{(V)} + \frac{k^2}{r^2} \zeta_3^{(V)} + \left(1 - \frac{k}{2r}\right) \zeta_4^{(H)} - k^2 \zeta_0^{(H)} \right\} \quad \text{--- (7)}$$

$$\zeta_0^{(H)} = \zeta_0^{(V)} + \alpha \left(\zeta_0^{(H)*} - \zeta_0^{(V)} \right) \quad \text{--- (8)} \quad \text{本計算では } k = 0.04 \times \delta, \quad k = \pi/80 \text{ radian とした。}$$



α, β は緩和係数で $\alpha = 1.0, \beta = 0.5$ とした。最適な緩和係数であるかどうか

については考察していない。また添字 V は計算のステップ数を表す。つぎに円柱表面での ζ の境界値は、図-3 に示すように円柱表面の流小関数を ψ とし、以下の近似計算ができる。(3)

$$\zeta = \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad \text{--- (9)} \quad \text{円柱表面では付着の条件から}$$

$$u = \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} = 0, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \psi_B = \text{constant.} \quad \text{したがって (9) 式から、円柱表面での}$$

$$\zeta \text{ の値 } \zeta_{\text{sur}} \text{ は } \zeta_{\text{sur}} = \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right]_{\text{sur}} \quad \text{--- (10)}$$

また、(9) 式を r につき微分すれば、円柱表面で

$$\frac{\partial \zeta}{\partial r} = \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right]_{\text{sur}} + \left[\frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right]_{\text{sur}} \approx \frac{\zeta_2 - \zeta_{\text{sur}}}{R} \quad \text{--- (11)}$$

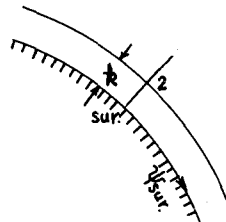


図-3

とここで ψ を円柱表面の近傍で Taylor 展開すれば、 $\psi_2 = \psi_B + \frac{1}{2} R^2 \left[\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} \right]_{\text{sur}} + \frac{1}{6} R^3 \left[\frac{\partial^3 \psi}{\partial r^3} \right] + \dots$

この式と (10), (11) 式とから ζ_{sur} を求めると

$$\zeta_{\text{sur}} = \frac{6/R^2 (\psi_2 - \psi_B) - \zeta_2}{2.0 - R/r_{\text{sur}}} \quad \text{--- (12)}$$

3. 圧力分布、抵抗係数の計算

(1) 式と (2) 式を ψ, ζ で表すと

$$\frac{\partial p}{\partial r} = \frac{1}{Re} \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} + \gamma \frac{\partial \psi}{\partial r} - \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial \psi}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \right) \quad \text{--- (13)}$$

$$\frac{1}{r} \frac{\partial p}{\partial \theta} = -\frac{1}{Re} \frac{\partial \zeta}{\partial r} + \frac{3}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} - \frac{1}{r^3} \frac{\partial \psi}{\partial \theta} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial r} \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^2} \quad \text{--- (14)}$$

(13) 式については図-1 中 B 点から D 点まで積分、(14) 式については B 点から A 点まで積分すると、

$$p(D) - p(B) = \frac{1}{Re} \int_B^D \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} dr - \frac{1}{2} u_D^2 \quad \text{--- (15)} \quad \left[\theta = 0 \text{ の軸上では } v = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = 0 \right]$$

$$\frac{p(A) - p(B)}{r_{\text{sur}}} = -\frac{1}{Re} \int_B^A \frac{\partial \zeta}{\partial r} d\theta \quad \text{--- (16)} \quad \left[\text{円柱上では } \psi_B = \text{constant.} \right]$$

(15), (16) 式から $p(B)$ を消去すれば、

$$p(A) - p(D) = -\frac{1}{Re} \left\{ \int_B^D \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial \theta} dr + \frac{1}{2} u_D^2 - \frac{r_{\text{sur}}}{Re} \int_B^A \frac{\partial \zeta}{\partial r} d\theta \right\} \quad \text{--- (17)} \quad \text{この式は、A 点から D 点までの圧力降}$$

下 Δp を表わしており、D 点の圧力を境界条件として与えれば、A 点の圧力は計算でき、円柱 1 ケー
場合には、D 点が無限遠点となる。つぎに、この Δp をもとにして、抵抗係数の計算を行なうが、浸透
層内の抵抗係数 C_D を次のように定義する。

$$C_D = \rho g i \delta / \rho g^2 \quad \text{ここで } g: \text{重力の加速度, } \rho: \text{密度}$$

円柱 (1) と円柱 (2) とでは C_D の値は違うが、単位領域の C_D とし、両者の平均値をとる。

4. 計算結果および実験結果

計算は逐次 sweep 方向を変えて、各点の稠度の相対誤差 $\left(\left| \zeta^{(H)} - \zeta^{(V)} \right| / \zeta^{(H)} \right)$ が $\frac{1}{1000}$ 以下になるまで繰り返した。流小関数 ψ と稠度 ζ とでは ζ の方が収束が遅いので ζ の相対誤差の最大値の評価だけで十分

であると考えらる。図-4 へ図-7 に代表的な流れのパターンを示す。レイノルズ数が10~20では円柱(1)の後方に渦領域発生のきざしがあるが、その部分の渦度の値は等渦度線図からもわかるように小さい。さらにレイノルズ数が20を越すと、渦領域が発生する。渦度の値もマイナスとなり、回転方向が変化していることを示す。さらにレイノルズ数が30程度では対称軸付近にも渦領域が発生し、最初には発生した渦領域も広がってくる。渦領域の発生箇所は、円柱1ヶの場合と異なり、他の円柱の影響が現れている。その様子は等渦度線図からよくわかる。レイノルズ数の増加にともない、等渦度線が下流へ流されていく度合が大きい。渦領域の等渦度線はマイナス符号である。円柱1ヶの場合には下流方向へ等渦度線が広がってゆくが、この場合には大きな制約を受けている。レイノルズ数をさらに増し50を越すと計算は発散し、解がえらばない。著者等は直角座標(格子間隔=0.02×8)で

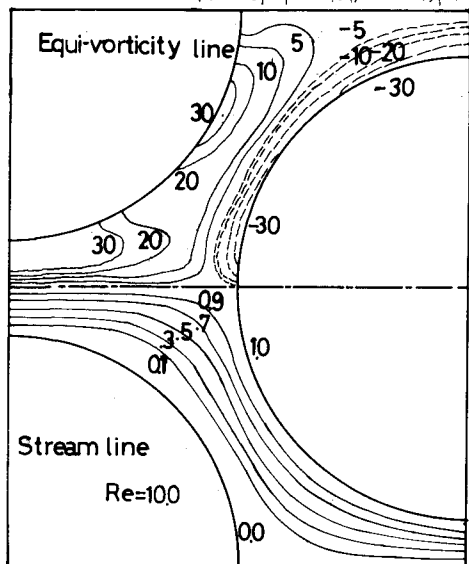


図-4

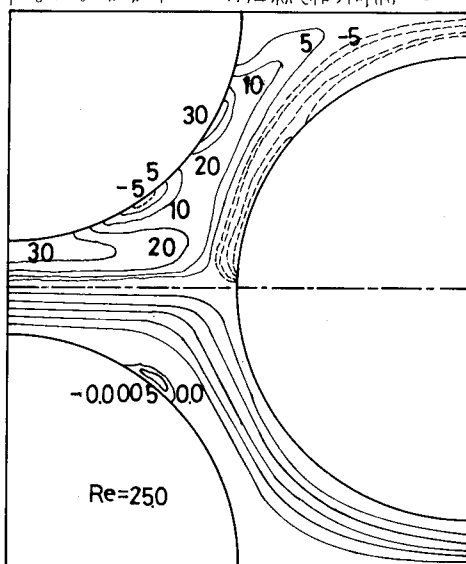


図-5

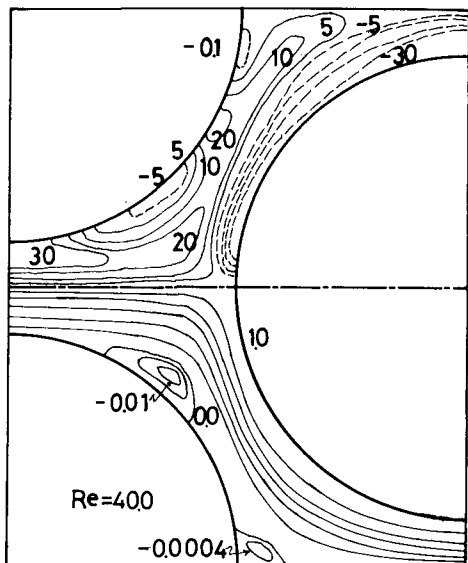


図-6

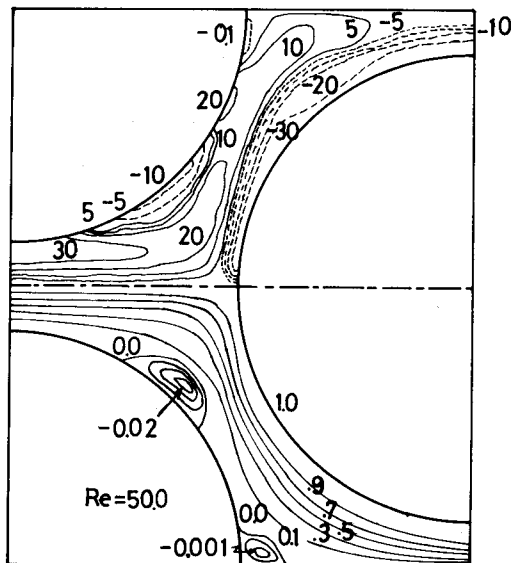
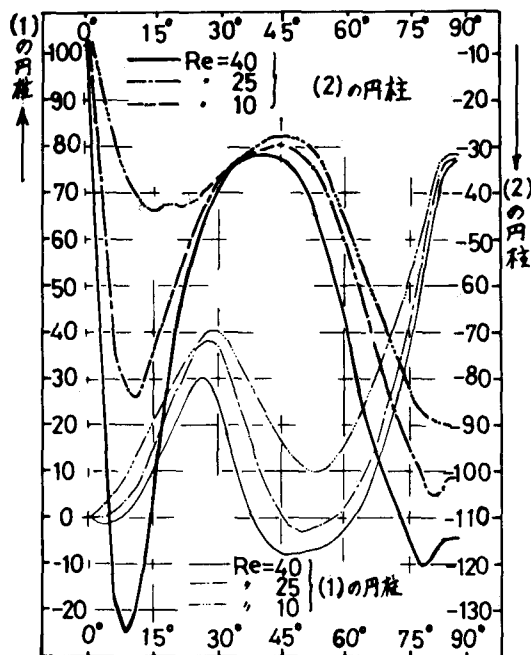


図-7

同様の計算を行なったが、解は乏しく、1Fが75を越えるところから流れは非定常になるものと考えられ、この流れの場合においては臨界レイノルズ数が50より少し大きい値であると言えよう。



円柱上の速度分布

図-8

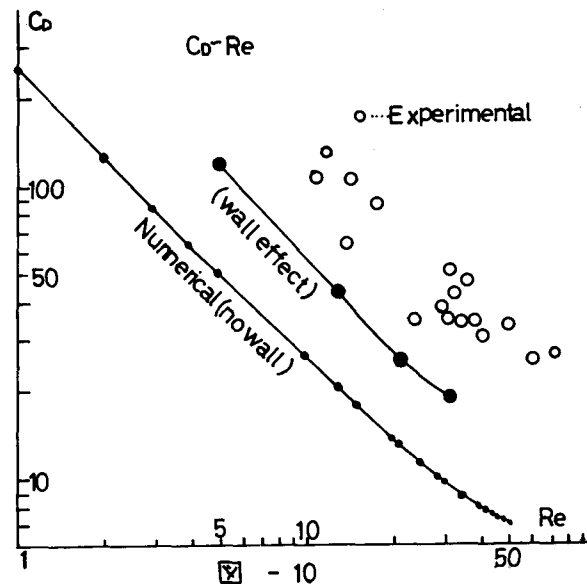


図-9

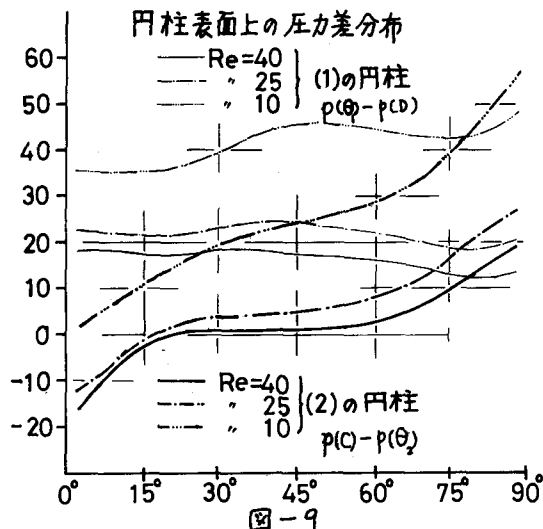


図-9

図-8には円柱表面上の速度分布を示す。円柱表面上で極大、極小値が存在する。やはり円柱の相互干渉が現われている。図-9には圧力差の分布も示しているが、円柱(2)の方が圧力差が大きく、レイノルズ数が小さいほどその傾向が大きいのは、壁面での摩擦損失が大きいことを表わす。図-10には、抵抗係数とレイノルズ数との計算値および実験値を示す。実験は $1.5 \times 2.5 \text{ cm}$ の断面積をもつ浸透長2mmのアクリル製boxの中に直径1mm円柱をporosity 37.1%で配置し、水頭差と流量を測定した。この際、円柱径に比べて、box断面積が小さいため、壁面の影響が大きいと考えられるので図-1中のCEおよびBDを壁面として計算した値も示している。その結果、壁面(側壁)の影響がかなりあり、壁面のない場合の2倍の抵抗係数となった。したがって、上下面の壁の影響も考慮すると実験値に近い値がえられ、ものと考えられる。以上、Navier-Stokesの

方程式を数値計算して、浸透層内の非Darcy流れの機構が多少程度理解できると見られる。

参考文献；(1) D.E. Wright ; Nonlinear flow through Granular media, ASCE HY 4 1968年 July

(2) 白倉昌明, 大橋泰雄 ; 流体力学(2) 257社 p56, 1969年

(3) Enzo O. Macagno, Tin-Kan-Hung ; Computational Study of Accelerated flow in a Two-dimensional Conduit Expansion. Jour. of Hydraulic Research vol 18 No. 1 1970