

九州大学工学部 正会員 上田年比古

—— — — — — ○ 杉尾 哲

1. まえがき 自由地下水面をもつ、均一な透水性の半無限浸透領域に、同規模の円形暗きよを同じ深さに多數並列させて、地下水を取水する場合を考えると、はじめに水平な直線である自由地下水面は、暗きよによる取水によって、暗きよ付近で低く、暗きよ周中央で高い形の曲線になる。本報はこのような曲線境界をもつ領域内の暗きよへの流れを、流入点へのポテンシャル流の解を用いて解析し、その結果より、暗きよ内水圧が任意の場合の暗きよ取水量および自由地下水面の形状を求め、これを粘性流体を用いて Hele-Shaw モデル実験により検証したものである。

## 2. Zhukovskiy 関数と複素ポテンシャルの式

図-1 の流れに、 $\theta_1 = \Psi - k\eta$ ,  $\theta_2 = \Psi + kx$  — (1)

の Zhukovskiy 関数を適用すると、表-1 のようになり、図-1 の自由地下水面が、図-2 の  $\theta$  平面では  $\theta_1 = 0$  の直線であらわされる。この  $\theta$  平面を図-3 に写像するととき、写像関数は Schwarz-Christoffel の変換式より、係数を  $M$  とすると、

$$\theta = M \int \frac{t-m^2}{\sqrt{t+1} \sqrt{t} (t-n)} dt \quad — (2)$$

となる。ここでさらに  $t = -\sin^2 \xi$  — (3) とおくと、式-2 は次のように積分され、図-3 は図-4 に写像される。

$$\theta = 2iM \left[ \xi - \frac{1}{G} \tan^{-1} \frac{\sqrt{n^2+1} \cdot \tan \xi}{n} \right] + C \quad — (3)$$

$G = n \sqrt{n^2+1} / (n^2 - m^2)$ ,  $C$  は積分定数である。式-3 に

$\xi = \eta + i\eta'$ ,  $M = M_1 + iM_2$ ,  $C = C_1 + iC_2$  を代入して実数部と虚数部にわけると

$$\theta_1 = -2 \{ M_2 (\xi - Re) + M_1 (\eta - Im) \} + C_1 \quad — (4)$$

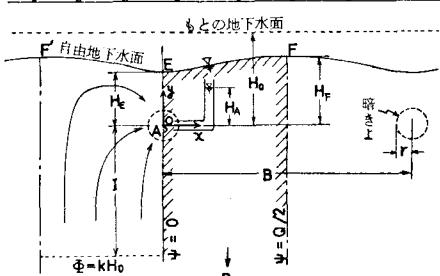
$$\theta_2 = 2 \{ M_1 (\xi - Re) - M_2 (\eta - Im) \} + C_2 \quad — (5)$$

$$Re = -\tan^{-1} \{ 2X / (X^2 + Y^2 - 1) \} / 2G, Im = \ln \{ X^2 + (1+Y)^2 \} / \{ X^2 + (1-Y)^2 \} / 4G$$

$$X = (\sqrt{n^2+1}/n) \cdot \sin 2\xi / (\cos 2\xi + \cosh 2\eta), Y = (\sqrt{n^2+1}/n) \cdot \sinh 2\eta / (\cos 2\xi + \cosh 2\eta)$$

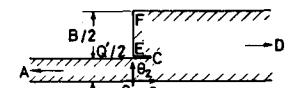
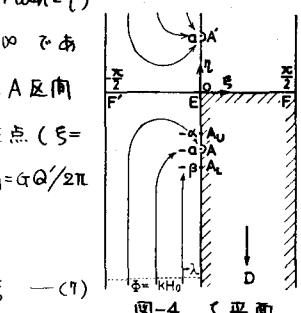
となる。ここで A 点 ( $\xi=0, \eta=-\sinh^{-1} n$ ) では  $Im = -\infty$  となるが、 $\theta_2 \neq \pm \pi$  であるから  $M_2 = 0$  である。また AD 区間 および DF 区間にて  $\tan^{-1} 0 = 0$ 、また EA 区間にて  $\tan^{-1} 0 = \pi$  となるように逆正接の値を選ぶと、 $C_2 = 0$  となる。つぎに E 点 ( $\xi = \eta = 0$ ) では  $\theta_1 = 0$  であるから  $C_1 = 0$  がえられ、 $\theta_2 = Q'/2$  であるから  $M_1 = GQ'/2\pi$  がえられる。これらを上式に代入して整理すると、次式のようになる。

$$\Psi - k\eta = \frac{Q'}{4\pi} \ln \frac{X^2 + (1+Y)^2}{X^2 + (1-Y)^2} - \frac{Q'}{\pi} G\eta \quad — (6), \Psi + kx = \frac{Q'}{2\pi} \tan^{-1} \frac{2X}{X^2 + Y^2 - 1} + \frac{Q'}{\pi} G\xi \quad — (7)$$

図-1  $Z$  平面

平面	区間	$F \sim E$	$E \sim A$	$A \sim D$	$D \sim F$
$Z$ 平面	$x, y$	$0, y$	$0, y$	$B/2, y$	
$W$ 平面	$k\eta, \theta/2$	$\Phi, Q/2$	$\Phi, 0$	$\Phi, Q/2$	
$\theta$ 平面	$0, \theta_2$	$\theta_1, Q/2$	$\theta_1, 0$	$\theta_1, \frac{Q}{2} + \frac{B}{2}$	

表-1 平面の対応

図-2  $\theta$  平面図-3  $t$  平面図-4  $\xi$  平面

まに図-4の流れは、A点と対称なA'点に流入点を仮想した帯状領域に流入点が2つある場合のポテンシャル流と同じであるから、複素ポテンシャルの式は、 $\sinh^{-1}n = \alpha$  とおくと

$$W = (Q'/2\pi) \cdot \ln \{ \sin(\xi + ia) \cdot \sin(\xi - ia) \} + \mu' \quad \text{--- (8)} \quad \text{であらわされ, } \xi = \xi + i\eta.$$

$\mu' = \mu_1 + i\mu_2$  を代入して実数部と虚数部にわけると、E点では  $\Phi = R_{HE}$  であることが

$\mu_1 = R_{HE} - (Q'/4\pi) \cdot \ln n^4$  とされ、 $\xi$ 軸上では  $\psi = Q'/2$  であることが  $\mu_2 = Q'/2$  となる。これらを代入して整理すると、次式のようになる。

$$\Phi = Q'/4\pi \cdot \ln \{ \{ \sin^2 \xi + \sinh^2(\eta+a) \} \{ \sin^2 \xi + \sinh^2(\eta-a) \} / n^4 \} + R_{HE} \quad \text{--- (9)}$$

$$\psi = Q'/2\pi \cdot [ \tan^{-1} \{ \cot \xi \cdot \tanh(\eta+a) \} + \tan^{-1} \{ \cot \xi \cdot \tanh(\eta-a) \} + \pi ] \quad \text{--- (10)}$$

(たゞって式-6, 7, 9, 10 の4式を連立せると、 $\zeta$  平面を媒介として、W平面とZ平面の対応がつかうから、これより図-1の流入点へのポテンシャル流を解くことができる。

### 3. 流入点への流入量

○暗きよの中心線上で  $\Phi = R_{HO}$  となる位置  $\xi = 0, X = 0, Y = -\tanh \lambda \sqrt{n^2 + 1} / n$  であるから

$$\text{式-6より} \quad 2\pi R (H_0 + I) / Q' = \ln \{ (n - \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \lambda) / (n + \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \lambda) \} + 2\lambda G \quad \text{--- (11)}$$

$$\text{式-9より} \quad 2\pi R (H_0 - H_E) / Q' = \ln \{ \sinh(\lambda - a) \cdot \sinh(\lambda + a) / n^2 \} \quad \text{--- (12)}$$

○暗きよ周中央のF点では  $\Phi = R_{HF}, \psi = Q'/2, X = B/2, \xi = \pi/2, \eta = 0, X = \infty, Y = 0$  であるから

$$\text{式-7より} \quad G \equiv n \sqrt{n^2 + 1} / (n^2 - m^2) = R_B / Q' + 1 \quad \text{--- (13)}$$

$$\text{式-9より} \quad 2\pi R (H_F - H_E) / Q' = \ln (1/n^2 + 1) \quad \text{--- (14)}$$

○暗きよ周壁下端AL点では  $\Phi = R_{HA}, Y = -r, \xi = 0, \eta = -\beta (\beta > 1), X = 0, Y = -\tanh \beta \sqrt{n^2 + 1} / n$  であるから

$$\text{式-6より} \quad 2\pi R (H_A + r) / Q' = \ln \{ (n - \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \beta) / (n + \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \beta) \} + 2\beta G \quad \text{--- (15)}$$

$$\text{式-9より} \quad H_E = H_A - (Q'/2\pi R) \cdot \ln \{ \sinh(\beta - a) \cdot \sinh(\beta + a) / n^2 \} \quad \text{--- (16)}$$

○暗きよ周壁上端AU点では、暗きよ内が満水状態の場合と未満水状態の場合とにわけて考える。満水

状態の場合には  $\Phi = R_{HA}, Y = r, \xi = 0, \eta = -\alpha (\alpha < 1), X = 0, Y = -\tanh \alpha \sqrt{n^2 + 1} / n$  であるから

$$\text{式-6より} \quad 2\pi R (H_A - r) / Q' = \ln \{ (n - \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \alpha) / (n + \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \alpha) \} + 2\alpha G \quad \text{--- (17)}$$

$$\text{式-9より} \quad H_E = H_A - (Q'/2\pi R) \cdot \ln \{ \sinh(\alpha - a) \cdot \sinh(\alpha + a) / n^2 \} \quad \text{--- (18)}$$

(たゞぐれ、暗きよ内が満水状態での流入点への流入量  $Q'$  と自由地下水水面の高さ  $H_E$  および  $H_F$  は、式-11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 を連立させて、境界I,  $H_0, r, H_A, B$ について解くことられる)。

つぎに暗きよ内が未満水状態の場合には、自由地下水水面と暗きよ周壁との交点をAU点とし、その位置を  $Y = y_A$  とおくと、 $\Phi = R y_A, \psi = Q'/2, X = \sqrt{r^2 - y_A^2}, \xi = \alpha, \eta = 0, X = \tanh \alpha \sqrt{n^2 + 1} / n, Y = 0$  であるから

$$\text{式-7より} \quad 2\pi R \sqrt{r^2 - y_A^2} / Q' + \pi = \tan^{-1} \{ 2n \sqrt{n^2 + 1} \cdot \tanh \alpha / \{ (n^2 + 1) \cdot \tanh \alpha - n^2 \} \} + 2\alpha G \quad \text{--- (19)}$$

$$\text{式-9より} \quad y_A = H_E + (Q'/2\pi R) \cdot \ln (1 + \sin^2 \alpha / n^2) \quad \text{--- (20)}$$

(たゞぐれ、式-11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 20 を連立させて解くことにはなるが、未知数として  $y_A$  がふえたから、このままで解は求まらない。いま  $y_A = H_A$  の場合を考えると、満水状態と同様に解が求まる。

$\xi = 0, y_A = H_A$  の場合の解を種々求めて検討してみると、 $I/H_0$  の値が小さくなるほど解の  $m^2$  の値は小さくな

る。ある値  $I_0/H_0$  で  $m^2 = 0$  となる。これはC点の定義から  $m^2 \geq 0$  であるから、 $I/H_0 < I_0/H_0$  では  $y_A$

$> H_A$  ではないと解が存在しない。そこで本報では  $y_A$  が最小の場合の解をつきのようす方法で求め、

これを未満水状態の場合の近似解とした。すなわち  $I/H_0$  以外の境界条件と  $m^2 = 0, y_A = H_A$  を与えて

といった解の  $I/H_0$  の値を  $I_0/H_0$  とし、与えられた境界条件の  $I$  と比べて  $I > I_0$  であれば  $y_A = H_A$  とおき、 $I < I_0$  であれば  $m^2 = 0$  とおりて、再び算定式から取水量  $Q$  と地下水位の高さ  $y_A, H_F, H_E$  (=  $a$  場合には物理的な意味はない) を求める方法である。

つぎに自由地下水位の形状は、式-6, 7, 9 に  $\eta = 0$ ,  $\psi = \theta/2$  を代入して整理した式より求められる。

$$x = \frac{Q'}{2\pi R} \left\{ 2G\delta + \tan^{-1} \frac{2n\sqrt{n^2+1} \cdot \tan\delta}{(n^2+1) \cdot \tan^2\delta - m^2} - \pi \right\}, \quad y = \frac{Q'}{2\pi R} \cdot \ln \left\{ (\sin\delta/n)^2 + 1 \right\} + H_E \quad (21)$$

#### 4. 暗きよ取水量

以上の解析は、暗きよへの流れを流入点への流れにおきかえたものであり、

流入点の流入量は暗きよ取水量の近似解である。この近似誤差は  $A_U, A_L$  点以外

の暗きよ周壁上のポテンシャル分布の相違によるものであるから、以上の解析

結果を用いて、暗きよ周壁上で実際の暗きよのポテンシャルと同じ値をとるよ

うに流れの場合の流入量を求めてみよう。<sup>2)</sup> いま流入点への流れにおりて、

暗きよ周壁上のはじ点  $P$  のポテンシャルを  $\Psi = rH_0$  とおき、 $\Psi = rH_0$  の

等ポテンシャル線から  $P$  点までの流線長を  $\ell$  とすると、 $P$  点での単位流

入量  $q_t$  はダルシー式より  $q_t = C_0 r (H_0 - H_t) / \ell = d\Psi / rd\theta$  ( $C_0$  は係数、 $\theta$

は角度) で表わされる。また実際の暗きよ周壁上の  $P$  点でのポテンシャルを  $\Psi = rH_t$  とおくと、同様にして単位流入量  $q_t$  は  $q_t = C_0 r (H_0 - H_t) / \ell$

$= q_t = P$  点が暗きよ内水面より下のとき  $H_t = H_A$ 、上のとき  $H_t = -r \cos\theta$ 。

この 2 式より  $C_0$  を消去し、 $q_t$  を暗きよ周壁に沿って積分すると、暗きよ

周壁全体からの流入量  $Q$  は次式で表わされる。

$$Q = 2 \int_{A_L}^{A_U} q_t d\theta = 2 \int_0^\pi \frac{C_0 r d\theta}{r d\theta} \frac{H_0 - H_t}{H_0 - H_t} r d\theta \quad (22)$$

$$\therefore q_t = \begin{cases} \pi : \text{暗きよ内水滴水状態} \\ \sin^{-1}(y_A/r) : \text{未滴水状態} \end{cases}$$

式-22の中より  $H_t$  は式-11~20 の解を式-6, 7, 9, 10

に代入すると、 $r, \eta$  を媒介変数としてえられ

る。この式-22よりえられる  $Q$  を求める暗きよ取水量と考える。

#### 5. Hele-shaw モデルによる検証実験

以上の解析結果を図-6 の Hele-shaw モデルによる実験結果と比較して

みよう。まず  $r/H_0 = 0.4, B/H_0 = 6.0, I/H_0 = 7.0$  の場合の自由地下水位について調べてみると図-7 のようになり。 $H_A/H_0 = 0$  の場合には解析結果が

やや高い位置を示しているが、全体的にはほぼ一致しているといえるよ

う。つぎに暗きよ取水量の解析結果を実験結果と比較すると図-8 のよ

うになり。 $H_A/H_0$  が小さい場合に解析結果がやや大きめの値をとるよ

うが、 $r/H_0$  が小さいときはその誤差も小さく、実際の暗きよの  $r/H_0$  の

値はあまり大きくなないこと考慮すると、本解析結果は十分満足ひき

図-8 取水量の実験結果との比較

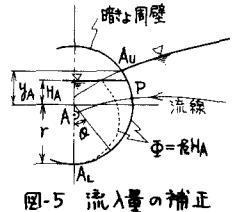


図-5 流入量の補正

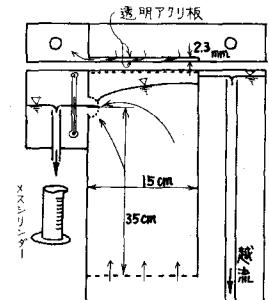


図-6 実験装置

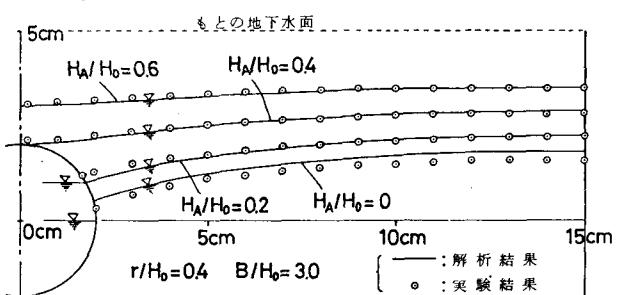


図-7. 自由地下水位の実験結果との比較

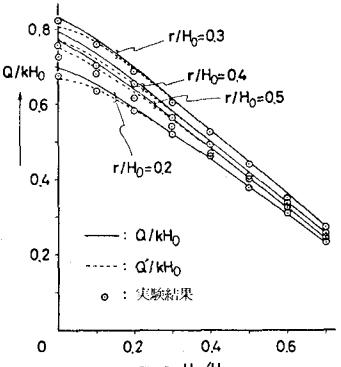


図-8. 取水量の実験結果との比較

3解であると考えることができる。

#### 6. 暗きよ取水量と自由地下水面の高さについての考察

以上の解析結果を用いて、境界条件と暗きよ取水量および自由地下水面との関係を調べてみよう。まず図-8より、暗きよ内水圧が近いほど暗きよ取水量が多くなり、その変化はほぼ直線的であることがわかる。つぎに図-9より、暗きよ間隔が大きいほど取水量が多くなるが、その増加率は暗きよ間隔が大きいほど小さくなることがわかる。なお参考までに、半無限領域に暗きよが1個埋設された場合

4) 取水量を、 $R/H_0 = I/H_0$ として求め、図中に丸印で示してある。またこの図の  $B/H_0 = 4.0$  における  $Q/RH_0 \sim r/H_0$  を求めると図-10のようになり、暗きよ径を大きくするほど取水量が多くなること、およびその増加率は暗きよ径が小さくときに大きいことなどがわかる。つぎに、ほとんどの地下水面と暗きよ内水圧との水頭差を  $\Delta H$  として、暗きよの埋設深さを変えた場合を調べてみると、 $r/\Delta H = 0.25$ 、 $B/\Delta H = 7.5$  の場合には図-11のようになる。これより水頭差を一定として暗きよの位置を深くすると、取水量は多くなるが、その増加率はわずかであること、また暗きよ間中央の地下水面の高さは、 $H_F/\Delta H = 1 \sim 2$  の場合には暗きよの位置を深くするほど近くなるが、 $H_0/\Delta H$  に比べて大きくなると、ほとんど変わらないことがある。つぎに図-12より暗きよ内水圧を低くすると、暗きよ間中央の地下水面の高さは、ほぼ直線的な傾向で低くなり、その変化は暗きよ間隔が小さいほど大きいことがわかる。また暗きよ径が大きいほど近い位置を示すようである。つぎに図-13より  $I/H_0$  が大きいと取水量は少ないとわかる。ここに  $I/H_0$  の値は、井戸の影響半径と同様に、取水施設の設計時には、その地盤に適した値を与えて取水量を予測することになるが、この図より、 $I/H_0$  が大きいとき、あるいは暗きよ径が小さいときには  $I/H_0$  が取水量に与える影響が小さくといえるが、全体的には  $I/H_0$  の影響は大きいことがわかる。

#### 参考文献

- 1). Polubarnova-Kochina: Theory of Ground Water Movement. Princeton Univ. Press, p.120, 1962.
- 2). 鳥取研究会: 浸透流に対する Hale-Shaw の実験の応用, 土木学会誌 36巻5号, p.21~24, 1951.
- 3). 上田, 杉尾: 水で満たされていない円形暗きよの取水量について, 土木学会論文報告集, NO.201, p.77~86, 1972.
- 4). 上田, 杉尾, 神野: 半無限領域内の集水暗きよによる取水量について(自由地下水面のある場合) 昭和44年度土木学会西部支部研究委員会論文集

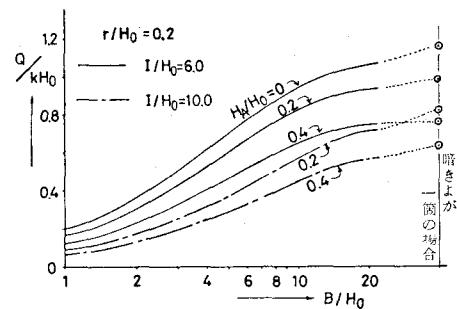


図-9  $Q/RH_0 \sim B/H_0$  の算定結果

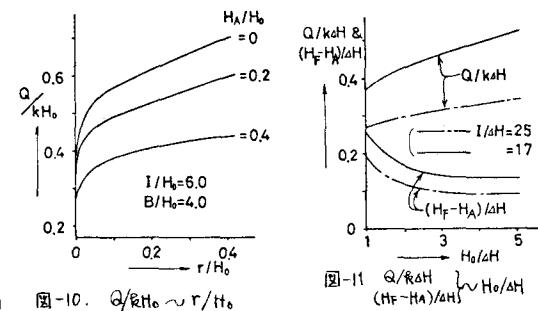


図-10  $Q/RH_0 \sim r/H_0$

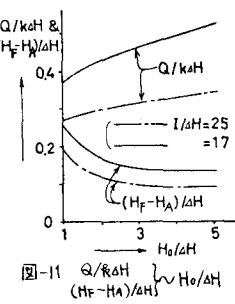


図-11  $Q/RH_0 \sim H_0/H$

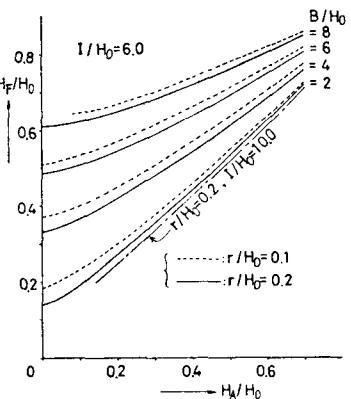


図-12  $H_F/H_0 \sim H_A/H_0$  の算定結果

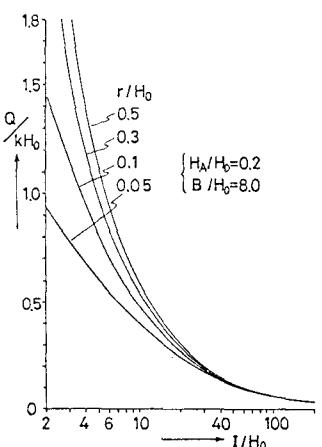


図-13  $Q/RH_0 \sim I/H_0$  の算定結果