

東海大学 正員 ○ 星田 義治

東海大学 正員 濱野 啓造

東海大学 正員 飯田 邦彦

1. まえがき

著者は、被圧地下水の挙動について、現地試験と理論式がよく一致することを確かめて、発表したが、今回は、不圧地下水（自由水面を持つ地下水）について検討した結果を報告する。

自由水面を持つ地下水に対しては、無次元パラメーター $\delta = Q / 2\pi k H^2 < 1$ の条件のもとで、非定常地下水流に対する非線形解^{*1}が求められている。ここでは、 $\delta < 1$ の条件にこだわらず理論を考えてみた。

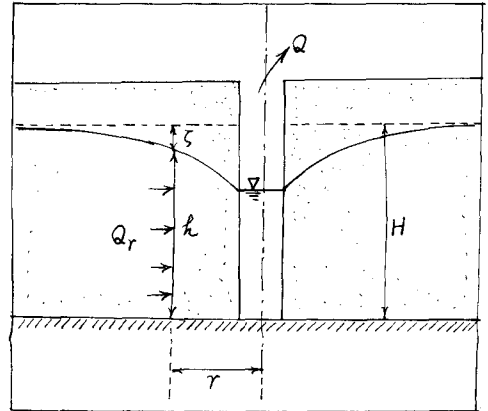


図 - 1

2. 理論

図-1のように、帯水層底面から地下水の自由水面までの高さを H 、揚水中に h とすれば、水面降下は、 $\zeta = H - h$ である。このときの基本方程式は、つぎの2つである。

$$\text{運動方程式} \quad Qr = -2\pi r h k \frac{\partial h}{\partial r} = 2\pi r h k \frac{\partial \zeta}{\partial r} \quad \text{----- (1)}$$

$$\text{連続方程式} \quad \frac{\partial Qr}{\partial r} = -2\pi r \beta \frac{\partial h}{\partial t} - 2\pi r \beta \frac{\partial \zeta}{\partial t} \quad \text{----- (2)}$$

ここに、 k : 透水係数, β : 有効空隙率

式(1)を r で微分し、式(2)に代入すると、式(3)を得る。

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = CH \left[\frac{\partial}{\partial r} \left\{ \left(1 - \frac{\zeta}{H}\right) \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right\} + \left(1 - \frac{\zeta}{H}\right) \frac{1}{r} \frac{\partial \zeta}{\partial r} \right] \quad \text{----- (3)}$$

ただし、 $C = k/\beta$ である。

いま、 $y = r^2 / 4CHt$ とおき、 $h = (H - \zeta)$ の関係を用いて、式(3)を変数変換すると式(4)を得る。

$$h \frac{d^2 h}{dy^2} + \left(\frac{dh}{dy} \right)^2 + \frac{h}{y} \frac{dh}{dy} + H \frac{dh}{dy} = 0 \quad \text{----- (4)}$$

ζ/H が1に比べて無視出来ないとすれば、式(4)を解かなければならない。

いま、 $g = h/H$ とおいて、式(4)を書き改めると、式(5)の無次元方程式を得る。

$$y \frac{d^2 g}{dy^2} + \left(\frac{dg}{dy}\right)^2 + \frac{g}{y} \left(\frac{dg}{dy}\right) + \frac{dg}{dy} = 0 \quad \text{----- (5)}$$

境界条件は、式(6)のようになる。

$$\left. \begin{array}{l} y \rightarrow 0 \quad \text{で} \quad yg \frac{dg}{dy} \Big|_{y=0} = Z_0 \\ y \rightarrow \infty \quad \text{で} \quad g = 1 \end{array} \right\} \quad \text{----- (6)}$$

ここに、 $Z_0 = Q / 4 \pi k H^2$ である。

実際問題では、 k 、 β を知るため、揚水量 Q に対する水位降下 ζ を測定する。 γ が非常に大きい所と、 γ が非常に小さい時は、測定できない。したがって、使用される y の値は、小さいものになる。そこで、式(5)において、 y の小さいときの近似解を求める。式(5)の各項のオーダーを調べるため、 $\xi = 1/y$ とおくと、式(7)になる。

$$g \frac{d^2 g}{d\xi^2} + \left(\frac{dg}{d\xi}\right)^2 + \frac{g}{\xi} \frac{dg}{d\xi} - \frac{1}{\xi^2} \frac{dg}{d\xi} = 0 \quad \text{----- (7)}$$

$\xi \rightarrow$ 大として、最後の項を無視すると、式(8)になる。

$$g \frac{d^2 g}{d\xi^2} + \left(\frac{dg}{d\xi}\right)^2 + \frac{g}{\xi} \frac{dg}{d\xi} = 0 \quad \text{----- (8)}$$

これは、直ちに解けて、式(9)となる。

$$g^2 = 2C_1 \log_e \xi + 2C_2 \quad \text{----- (9)}$$

ξ を y に書きかえて

$$g^2 = -2C_1 \log_e y + 2C_2 \quad \text{----- (9)'}$$

式(9)' を微分して、境界条件を考慮すると C_1 が求まる。

$$yg \frac{dg}{dy} = -C_1 = Z_0$$

したがって

$$g^2 = 2Z_0 \log_e y + 2C_2 = 2Z_0 (C_2' + \log_e y) \quad \text{----- (9)''}$$

ここでは、 y が小さいとして、解いた解なので、 $y \rightarrow \infty$ の条件で C_2' を定めることは出来ない。 y が大きい所は、 $\gamma \rightarrow$ 大か $\gamma \rightarrow$ 小であり、このときには、水位の下がり方は、非常に小さいので $\zeta/H \ll 1$ である。

したがって、 y が大きいときは、 $\zeta/H \ll 1$ として、1 に比べて ζ/H を無視した解に漸近するはずである。

そこで、 y が大きくなったとき、 ζ/H を無視している、Theis の非定常解

($g = 1 - \frac{Q}{4\pi k H^2} \int_y^\infty \frac{e^{-y}}{y} dy$) に接続するように C_2' を定める。定め方は検討中である。

※ 1: 三宅・岸・池田: 井戸への非定常地下水流に対する非線形解: 第20回講演会, 昭40