II-226　水循環系内の物質挙動に関する確率統計的考察

立命館大学理工学部　正員　山田　淳
京都大学工学部　学生員　○早川哲夫

1. はじめに

都市域をひとつの水循環系とみたこの研究は，今後，逼迫する水不足と環境保全の問題に対処するため，都市内での水の循環とともに，物質の循環についてもあわせ考えていこうとしたひとつの試みである。「都市」という言葉によるイメージが抽象の域を出ないように，この研究にも各種のアプローチが考えられる。例えば，マクロな「都市」自身の成長についての研究であり，あるいは，その構成要素たる土地利用形態，人口の推移等と関連した水量，水質の挙動，あるいは，都市内に存在する種々の物質の生産，廃棄の過程である。このように，一見異なった様相を呈する個々の要素の各数量の増減を，出生，死滅とみなすポピュレーションバランスの考え方をとることによって，全体を統一的に扱うことができる。

2. ポピュレーション・バランス

ポピュレーションバランスは，計測できるある種の分布について，その分布が時間，位置，あるいはその分布の性質を規定する特性等によって，いかに変化するかを扱うときに用いられる手法である。ここで，ある種の性質の分布の密度関数を(1)で定義する。

$$\psi=\psi(x, y, z, t, \xi_1, \cdots, \xi_m) \tag{1}$$

ただし，x, y, z；空間座標，t；時間，ξ_i；ψを規定するi番目の特性

ここで，任意の微小区間$R(t)$で，ψのバランスをとることにすれば，

$$\frac{d}{dt}\int_{R(t)}\psi dR=\int_{R(t)}\left[\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v_i\psi)+\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(v_{x_j}\psi)\right]dR=\int_{R(t)}(B-D)\,dR \tag{2}$$

ただし，$d\xi_i/dt=v_i$，$dx_j/dt=v_{x_j}(x_1=x, x_2=y, x_3=z)$，$B, D$；$\psi$のBirth, Death

(2)で，微小区間$R(t)$は，任意にとりうるので(3)式が成立する。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\sum_i\frac{\partial}{\partial\xi_i}(v_i\psi)+\sum_j\frac{\partial}{\partial x_j}(v_{x_j}\psi)+(D-B)=0 \tag{3}$$

上式の第2項の意義を明確にすることがひとつの課題であるが，ここでは，$\psi=\psi(x, y, z, t)$（ψは水質値）とおいて，水循環系内のひとつとしての河川に注目し，水質の連続式(4)を得た。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+\frac{\partial}{\partial x}(u\psi)+\frac{\partial}{\partial y}(v\psi)+\frac{\partial}{\partial z}(w\psi)-\left\{\frac{\partial}{\partial x}\left(\varepsilon_x\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varepsilon_y\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(\varepsilon_z\frac{\partial\psi}{\partial z}\right)\right\}+C\psi=0 \tag{4}$$

ただし，u, v, w；x, y, z方向の流速，$\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z$；乱流拡散係数，$C$；$(D-B)$に相当する反応係数

次に，河川を二次元流（x；流下方向，y；横断方向）とみて，y軸方向の流速，x軸方向の拡散を無視し，局所流の影響を考慮して，$u=U\{1+\chi\}$，$\varepsilon_x=\bar{\varepsilon}_x\cdot\varphi_x$，$\varepsilon_y=\bar{\varepsilon}_y\cdot\varphi_y$とおき，次式を得る。

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}+U(1+\chi)\frac{\partial\psi}{\partial x}-\varepsilon\varphi_x\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}-\varepsilon\varphi_y\frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}+C\psi=0 \tag{5}$$

ここで，U；x軸方向の平均流速，χ；局所流の平均からのずれ，$\bar{\varepsilon}_x=\bar{\varepsilon}_y=\varepsilon$；$\varepsilon_x, \varepsilon_y$の平均値，$\varphi_x, \varphi_y$；平均1の乱数

(5) 式を無次元化するために，$\xi=(x-Ut)/a$，$\eta=(y-a)/a$，$\tau=\varepsilon\cdot t/a^2$，$\mu=Ua/\varepsilon$
$C_1=a^2\cdot C/\varepsilon$，$a$；河川の幅(Const.)と記号を定義すれば，次のようになる。

$$\frac{\partial\psi}{\partial\tau}=\mu\chi\frac{\partial\psi}{\partial\xi}-\varphi_\xi\frac{\partial^2\psi}{\partial\xi^2}-\varphi_\eta\frac{\partial^2\psi}{\partial\eta^2}+C_1\psi=0\quad(\varphi_\xi=\varphi_x,\ \varphi_\eta=\varphi_y)\quad(6)$$

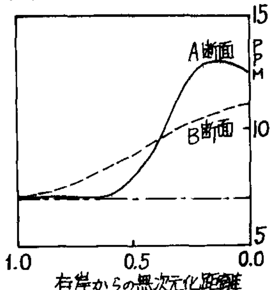

図-1 淀川横断面 Cl^- 値

式(6)がポピュレーションバランスから得られた二次元モデル式である。

3. モーメントの導入

ここで，(6)式をそのまま解くのではなく，ψのある軸に沿ってのモーメントを計算し，モーメント方程式に変形する。水循環系内の物質循環を調べるにあたって，理想的な物質の存在状態は，種々の態様が考えられる。たとえば，O_2ならば空間内に一様に分布し，廃棄物ならばある特定の場所に集中していることが必要である。ここでは，河川の水質分布を考察するから，汚濁の原因物質が一点に集中していることが理想であり，その状態からの散布の度合をモーメントを導入することにより調べる。その際の前提としては，水質分布に限らず廃棄物，人口，工場等の分布は，あるパターンをもっており，個々の密度の値を知らなくても，数次のモーメントをとることにより，およその概形を知りうることが仮定されている。変換は，式(6)にη^pを乗じ，0〜1まで積分する。(pはモーメントの次数，右岸$\eta=0$，左岸$\eta=1$)

$$\frac{\partial\langle\eta_p\rangle}{\partial\tau}+\mu\chi\frac{\partial\langle\eta_p\rangle}{\partial\xi}-\varphi_\xi\frac{\partial^2\langle\eta_p\rangle}{\partial\xi^2}-\varphi_\eta\,p(p-1)\langle\eta_{p-2}\rangle+C_2\langle\eta_p\rangle$$
$$+\varphi_\eta\,p\cdot A\cdot\exp[-C_3\tau]=0\qquad(7)$$

ただし，$\langle\eta_p\rangle=\int_0^1\psi\cdot\eta^p d\eta$，$A=\psi_{\tau=0,\eta=1}$

4. 適用例

式(7)を淀川中流部の2断面(断面間3km)における横断実測値に対して適用してみる。この付近においては，図-1のごとく，右高左低となっているので，左岸側の水質値を基準値として差引き各モーメント(0, 1, ……n次)を求め，差分式によってA断面からB断面へと計算する。この場合，$\tau=0$において$A=0$となるので，式(7)の最後の項はない。B断面における計算値と実測値を，拡散係数をパラメータとして表示したものが図-2である。ここでは，Cl^-，T-Nにおいて，類似の傾向があったが，BOD_5においては，かなり異なっている。このことから直ちに結論を導くには至らないが，モーメントを用いない方法による結果と比較することによって，モーメント方程式の近似性について，ある程度の知見が得られるはずである。

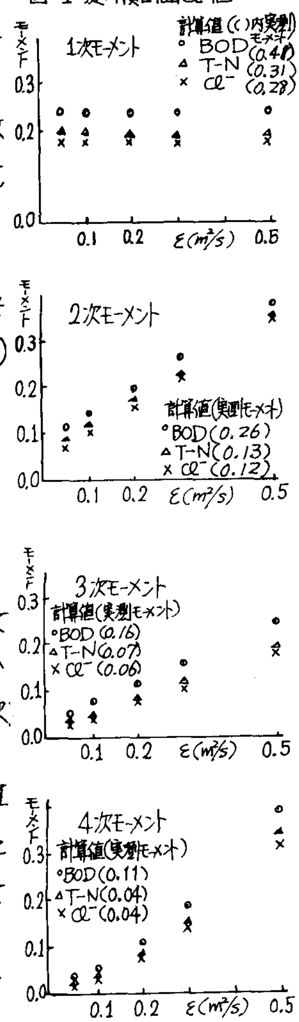

図-2 B断面計算-実測比較

以上の方式で，水循環にかかわる人工領域，自然領域，社会的領域について，それぞれ基礎的な式をたて，さらに，それらの総合化を目指すつもりである。

<参考文献> D.M.Himmelblau & K.B.Bischoff ; Process Analysis and Simulation - Deterministic Systems -, Aris, Rutherford ; On the Dispersion of a Solute in a Fluid Flowing through a Tube, 他